EHM3132 Gr.1

Otomatik Kontrol

Bölüm 2
Fiziksel Sistemlerin Matematiksel Modelleri

Temel Büyüklükler ve Birimleri

International System of Units (SI)

Büyüklük	SI Birimi	Kısaltma	Sembol
Uzunluk	metre	m	L , l
Kütle	kilogram	kg	M , m
Zaman	saniye	s	T , t
Elektrik Akımı	amper	A	I , i
Sıcaklık	Kelvin	K	derece
Madde miktarı	mol	mol	
Işık şiddeti	kandela	cd	cd

TABLE 2.1 Summary of Through- and Across-Variables for Physical Systems

System	Variable Through Element	Integrated Through Variable	Variable Across Element	Integrated Across Variable
Electrical	Current, i	Charge, q	Voltage difference, v_{21}	Flux linkage, λ_{21}
Mechanical translational	Force, F	Translational momentum, P	Velocity difference, v_{21}	Displacement difference, y_{21}
Mechanical rotational	Torque, T	Angular momentum, h	Angular velocity difference, ω_{21}	Angular displacement difference, θ_{21}
Fluid	Fluid volumetric rate of flow, Q	Volume, V	Pressure difference, P_{21}	Pressure momentum, γ_{21}
Thermal	Heat flow rate, q	Heat energy, H	Temperature difference, $\mathcal{T}_{21}$	

Otomatik Kontrol

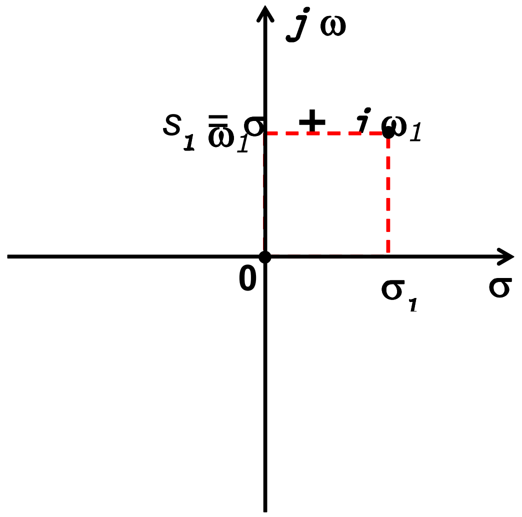
Matematiksel Temeller

- Karmaşık Değişkenler
- Diferansiyel Denklemler
- Laplace Dönüşümleri

Karmaşık Değişkenler

$$s = \sigma + j\,\omega$$

$$G(s) = Re\,\{G(s)\} + j\,Im\,\{G(s)\}$$



Diferansiyel Denklemler

Örnek: Seri bağlı RLC devresinin 2.mertebeden diferansiyel denklemi:

$$R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$$

Genel olarak n.mertebe diferansiyel denklem:

$$\frac{d^n y(t)}{dt} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_1\frac{d^1 y(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

a_0 , a_1 . . . a_{n-1} katsayıları $y(t)$'nin bir fonksiyonu değilse “doğrusal adi diferansiyel denklem” olarak adlandırılır.

Not: Bu ders kapsamında ilgilendiğimiz sistemlerin toplu parametreli sistemler olması nedeniyle yalnız bu tür diferansiyel denklemlerle karşılaşacağız.

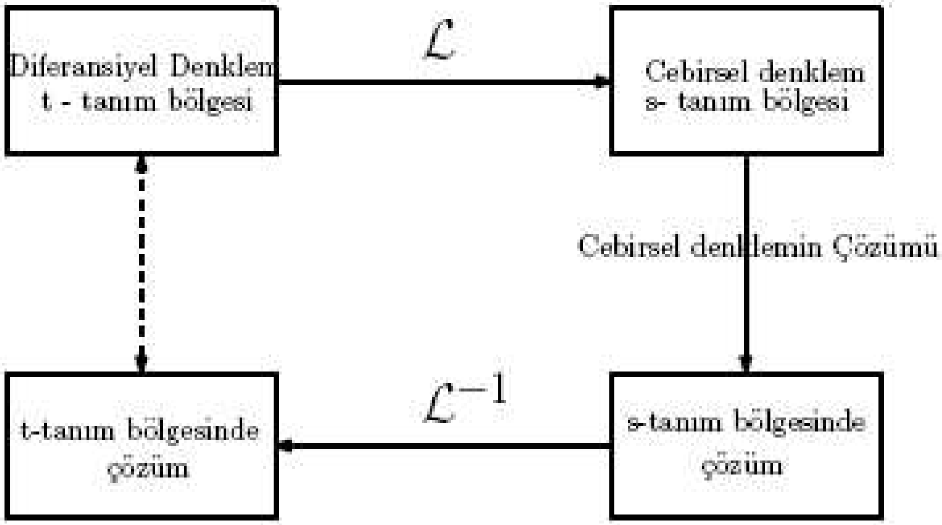
LAPLAS (LAPLACE) DÖNÜŞÜMÜ

Zamanla değişen bir **f(t)** fonksiyonunun Laplas dönüşümü

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad s > 0$$

İle elde edilir ve gösterimi: $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Diferansiyel denklemlerin Çözümünde Laplace dönüşümü



Laplas dönüşümü, diferansiyel denklemlerin cebirsel ifadelere dönüştürülerek çözümlerinin kolayca elde edilmesi amacıyla kullanılır.

Teorem: Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

İspat: Bu dönüşümün lineer olması için linner olma koşullarını sağlaması gerekir;

1) $\mathcal{L}(f+g) \stackrel{?}{=} \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$

2) $\mathcal{L}(cf) = c(f)$

$$\int_0^\infty (f(t)+g(t))e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$$= F(s)+G(s)$$

$$\int_0^\infty cf(t)e^{-st}dt = c\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = c\mathcal{L}(f(t))$$

Lineer olmanın her iki koşulunu da sağladığı için Laplas dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Bazı Önemli Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

Örnek: $f(t) = 1$ İse f(t) nin Laplas dönüşümü nedir? $F(s) = ?$

$$\int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-sR}-1}{-s} = \frac{1}{s}$$

Örnek: **e^{at}f(t)** nin Laplas dönüşümü nedir? $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = ?$

(Bu ifadeye üstel öteleme de adı verilir.)

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{(a-s)t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

Şayet $s_1 := s-a$ sabit dönüşümü yapılırsa

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s_1)t}dt = F(s_1) = F(s-a)$$

Sonuç: *Eğer **e^{at}f(t)** nin Laplas dönüşümünü bulmak istiyorsak **f(t)**'nin Laplas dönüşümünü alıp **s** yerine **s-a** yazmak yeterli olur.*

Örnek: **e^{at}** nin Laplas dönüşümü nedir?

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \mathcal{L}(e^{at}\cdot 1) = \mathcal{L}(1)|_{s:=s-a} = \frac{1}{s-a}$$

Örnek: $e^{(a+jb)t}$ nin Laplas dönüşümü nedir?

$$\mathcal{L}(e^{(a+jb)t}) = \mathcal{L}(e^{(a+jb)t} \cdot 1) = \mathcal{L}(1)|_{s:=s-(a+jb)} = \frac{1}{s-(a+jb)}$$

Örnek: **Cos(at)** nin Laplas dönüşümü nedir?

Cos(at)'nin euler dönüşümü: $\cos at = \dfrac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{jat}) + \mathcal{L}(e^{-jat})\right]$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{s+ja}\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

Benzer şekilde **sin(at)** nin Laplas dönüşümü:

$$\frac{a}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

Adi Diferansiyel Denklemlerin Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri ve Çözümleri

$$y'' + Ay' + By = u(t)$$

şeklinde sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin $y(0) = y_0$ ve $y'(0) = y'_0$ ilk koşulları altında çözümleri Laplace dönüşümü ile kolaylıkla yapılabilir. Bunun için öncelikle $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$ ile $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ şeklinde hesaplanır. Daha sonrada

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

bulunur. Burada $y(t)$ nin türevleri mevcut olduğundan türev ve integral işlemlerinin Laplace dönüşümlerini öncelikle irdelemeliyiz.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$\boxed{\text{Kıs. türev. ayırma=(Türev alma,integral al)} - \int_0^\infty \text{(Her ikisinide yap)}}$$

$$= e^{-st} f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t)dt$$

$$= 0 - f(0) + s \underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{F(s)} \quad = sF(s) - f(0)$$

Örnek: $\dfrac{1}{s^2 - 4s + 5}$ İfadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 1}\right\}$$

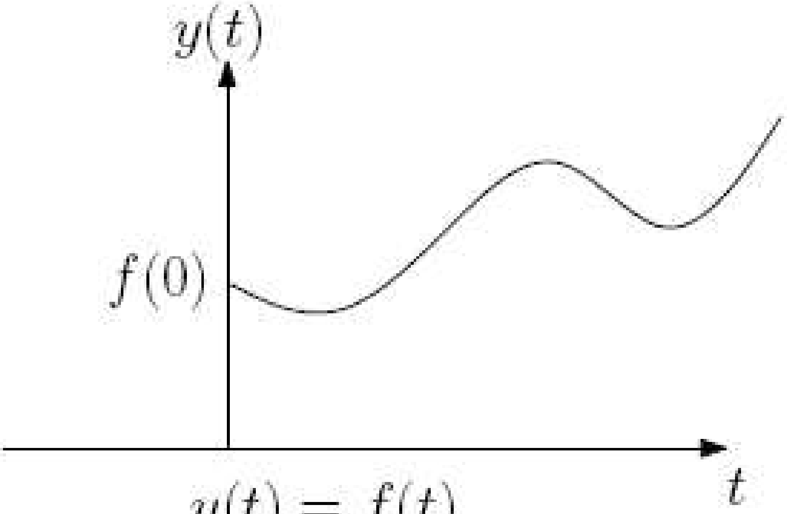
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t = F(s)$$

Önceki örnekteki **s**’in yerini **s-2** almıştır. O halde fonksiyonumuz **F(s-2)** dir.($a = 2$)

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$$

Bir fonksiyonu zaman ekseni üzerinde kaydırırsak, o fonksiyonun ötelenmiş halini elde ederiz.

Fonkisyonların negatif bölgedeki değişimleri bilinmiyor olabilir.

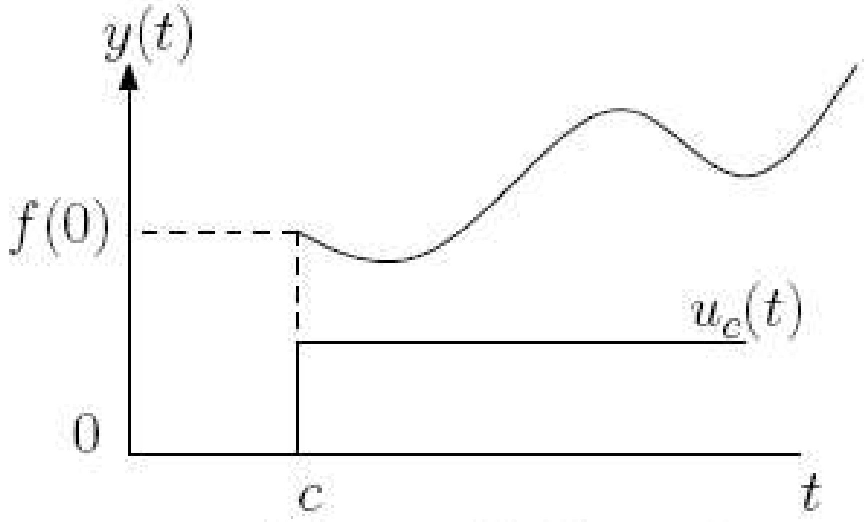


$y(t) = f(t)$

Bu durumda **f(t)** fonksiyonunu pozitif zaman ekseni üzerinde **c** kadar kaydırdığımızda **f(t)**'nin negatif zaman ekseni **üzerinde** **c** kadar davranışına ihtiyacımız ortaya çıkar.

Bu kısmı bilmediğimiz için kaydırılımış fonksiyonun ilk **c** birimlik süresi sıfır olmalıdır.

Dolayısyla bunu oluşturabilmek için **f(t)** fonksiyonu **c** kadar ötelenmiş birim basamak fonksiyonu ile çarpmamız gerekir.



$$y(t) = u_c(t)f(t-c)$$

__Teorem:__ $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s)$

__İspat:__

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt$$

Burada $\zeta := t-c$ dönüşümünü yaparsak işlemlerimiz kolaylaşacaktır, şöyle ki:

$$\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt = \int_0^\infty e^{-s(\zeta+c)}f(\zeta)d\zeta = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-\zeta s}f(\zeta)d\zeta = e^{-sc}F(s)$$

Örnek: $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$ İfadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = t - u_2(t)(t-2)$$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 2 \\ 2 & t \ge 2 \end{cases}$$

NOT: **0** – ∞ arasında tanımlanmış **sint** fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu **π/2** kadar zaman ekseninde sağa doğru ötelersek, Laplas değeri:

$$\mathcal{L}\{\sin t\} \longrightarrow \mathcal{L}\{u_{\pi/2}\sin(t-\pi/2)\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} \xrightarrow{\neq} \mathcal{L}\{\sin(t-\pi/2)\}$$ Değildir.

Örnek: $$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi/4 \\ \sin t + \cos(t-\pi/4) & t \ge \pi/4 \end{cases}$$

İfadesinin Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4)\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1+se^{-\pi/4}}{s^2+1}$$

Ters Laplas Dönüşümleri

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ şeklinde sembolize edilir. Kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılır, böylece karmaşık ifadeler sadeleştirilerek Laplas dönüşümü bilinen ifadeler haline dönüştürülür.

Örnek: $\frac{1}{s(s+3)}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = ?$$

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3}$$ Terimlerin ayrı ayrı ters dönüşümlerini alacak olursak;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Örnek: $\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}\right\} =?$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{A}{(s+1)} + \frac{3/4}{(s-1)}$$

Eşitliğin her iki tarafı **s** in bütün değerleri için eşit ise **s=0** içinde eşittir. Bu durumda;

$$-1 = -\frac{1}{2} + A - \frac{3}{4} \qquad \boxed{A = 1/4}$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{(s+1)} + \frac{3/4}{(s-1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}\right\} = -0.5te^{-t} + 0.25e^{-t} + 0.75e^{t}$$

Örnek: $\frac{3s+2}{s^2+42+20}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

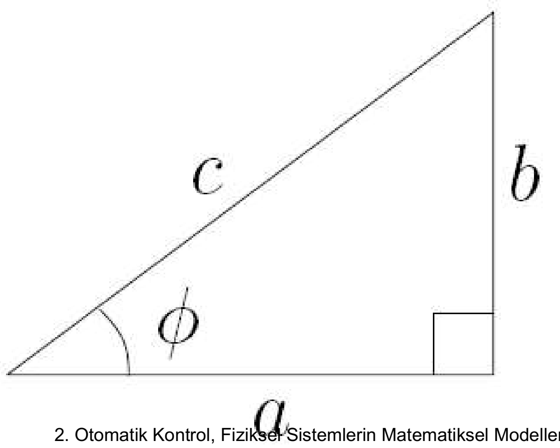
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+42+20}\right\} =?$$

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s+2)^2+4^2} = 3\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2} - \frac{4}{(s+2)^2+4^2}$$

Ters Laplas Dönüşümü

$$= 3e^{-2t}\cos 4t - 4e^{-2t}\sin 4t$$

Hatırlama: $a\cos r\theta + b\sin r\theta = c\cos(r\theta - \phi)$



$$f(t) = e^{-2t}[3\cos 4t - 4\sin 4t]$$

$$= e^{-2t}\cdot 5\cdot\cos(4t + \tan^{-1}(4/3))$$

Yüksek Mertebeden Türevlerin Hesaplanması

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = ?$$

$f''(t) = \left[f'(t)\right]'$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

$sf(0) = 0$

$f'(0) = 0$ ise

$$= s^2F(s)$$

Darbe (İmpuls) Fonksiyonu

Darbe fonksiyonu sistemelerin davranışları hakkında bilgi edinmek için kullanılır.
Darbe fonksiyonu, kuvvetin, gerilimin veya benzer fonksiyonların sisteme çok kısa süre içersinde çok büyük değerler alacak şekilde uygulanması ile oluşturulur.

Istaka ile bilardo topuna vurmak buna örnek olabilir. Bu vuruş sonrası topun dinamik davranışı, ilk değerleri sıfır kabul edilen bir sistemin darbe yanıtı şeklinde ele alınabilir.

Futbolda ise verilen bir pasa veya ortaya şut çekilmesi, vole vurulması sonrası topun dinamik davranışı, ilk değerleri sıfır olmayan bir sistemin darbe yanıtı şeklinde ele alınabilir.

$$ay'' + by' + cy = u(t)$$

formunda diferansiyel denklemler doğurur. İşte burada $u(t)$ darbe şeklinde bir fonksiyondur ve $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığında çok büyük değerler alan ama diğer tüm zaman diliminde sıfır değerini alan bir fonksiyondur. Şimdi

$$I(\tau) \triangleq \int_{t_o-\tau}^{t_0+\tau} u(t)dt$$

şeklinde birintegral tanımlayalım. Açıktır ki $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığının dışında $u(t) = 0$ olduğundan

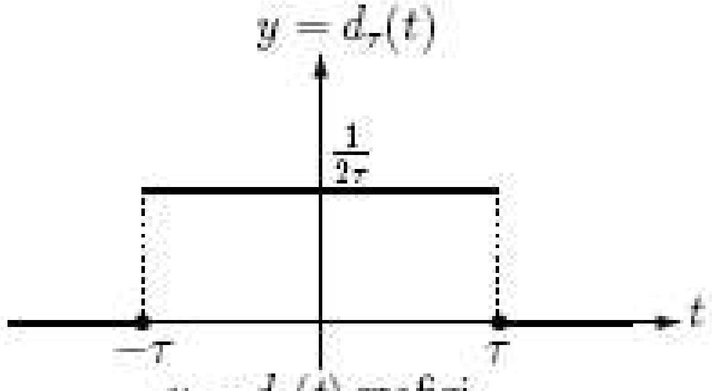
$$I(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt$$

yazılabilir. Bu integral aslında darbenin büyüklüğü hakkında bir metrik tanımlar. Örneğin mekanik bir sistemde $u(t)$ bir kuvvet fonksiyonu ise, $I(\tau)$, $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığında *toplam kuvvet darbesi* olarak adlandırılır.

Şimdi özel bir durum olarak $t_0 = 0$ kabul edelim ve u(t) işaretini şu şekilde tanımlayalım:

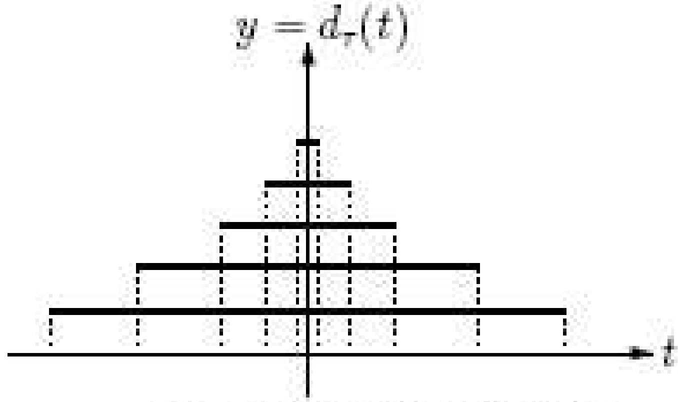
$$u(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & -\tau < t < \tau \\ 0 & t \leq -\tau \text{ veya } t \geq \tau, \end{cases}$$

Burada τ çok küçük pozitif bir sabit olsun. İlgili durum Şekilde gösterilmektedir.



$y = d_\tau(t)$ grafigi

τ→0' giderken, grafik:



$y = d_\tau(t)$ grafigi $\tau \to 0$

Açıktır ki bu durumda τ nun değeri sıfırdan farklı olacak şekilde ne olursa olsun, $I(\tau) = 1$ olur. Şimdi τ yu giderek küçültelim. Bu durumda açıktır ki

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1$$

olur. İşte bu bizi ideal duruma götürür. O da tam $t = 0$ da genliği bire eşit olan ama diğer tüm zaman diliminde değeri sıfıra eşit olan bir fonksiyondur. İşte bu fonksiyona **birim darbe fonksiyonu (unit impulse response)** adı verilir. Biz özel olarak birim darbe fonksiyonunu $\delta(t)$ ile sembolize edeceğiz. O halde $\delta(t)$ için şu özellikler yazılabilir:

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Bu delta fonksiyonuna Dirac fonksiyonu adı da verilir.

***Paul A.M. Dirac (1902-1984)**, İngiliz matematikçi ve fizikçisi, 1933 senesinde Nobel ödülü aldı.(Kuantum mekaniği üzerindeki çalışmaları nedeniyle.)

$\delta(t)$, $t = 0$ için tanımlanmış bir fonskiyondur. Ancak herhangi bir t_0 noktası içinde ötelenmiş olarak $\delta(t-t_0)$ şeklinde de tanımlanabilir. Bu durumda özellikleri

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad t \neq t_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1.$$

Şimdi $\delta(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmaya çalışalım: Açıktırki

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}, \qquad \text{yazılabilir.}$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t-t_0)dt$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} d_\tau(t-t_0)dt$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{2\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st}dt = -\frac{1}{2s\tau} e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau}$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{2s\tau} e^{-st_0}(e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0}$$

Ancak $\tau \to 0$, $(\sinh s\tau / s\tau)$ tanımsızdır. Bu durumda limit ancak L'Hospital kuralı ile bulunabilir. Bu durumda

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0} = \lim_{\tau\to 0} \frac{s\cosh s\tau}{s} = 1$$

Bu durumda açıktır ki; $\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}}$

Özel olarak $t_0 = 0$ kabul edilirse

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

elde edilir.

Örnek: $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$

şeklide yanımlanmış bir sistem için $u(t) = 2e^{-2t} \quad t \geq 0$ şeklinde bir giriş olsun. Şayet $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ ise sistem yanıtı $y(t)$ ne olur?

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)} = -\frac{1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$y(t) = -e^{-2t} + 2/3e^{-t} + 1/3e^{-4t} \quad t \geq 0$$

şeklide hesaplanır.

Periyodik Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

Tanım (Periodik Fonksiyon:) Bir $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t+T) = f(t)$$

$\forall t$ için ise bu $f(t)$ fonksiyonu $T > 0$ periodiktir denir. Periodik bir fonksiyonu tanımlamak için genellikle pencereleme tektiği kullanılır, şöyleki:

$$f_T(t) = f(t)[1 - u_T(t)] = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{aksi durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $f_T(t)$ pencerelenmiş fonksiyonu göstermektedir. $f_T(t)$ nin Laplace dönüşümü ise

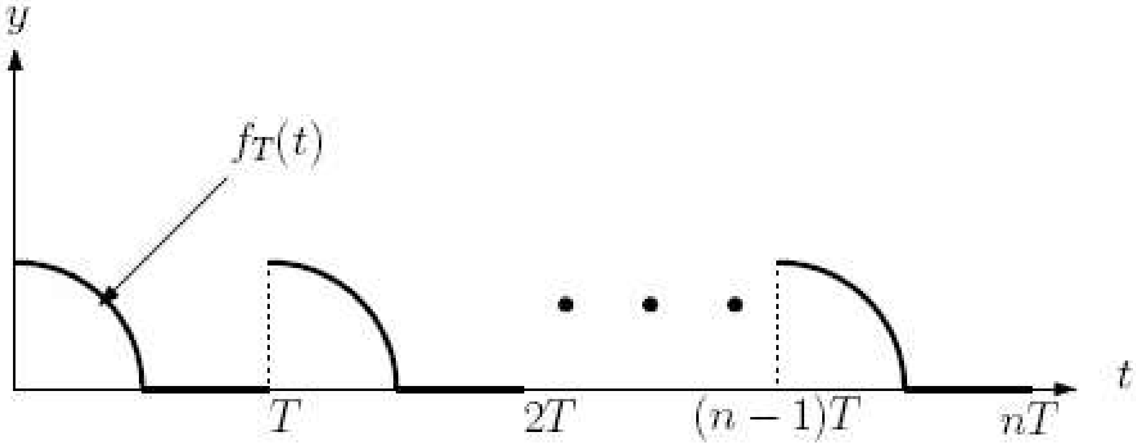
$$F_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_T(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Pencerelenmiş yukarıdaki fonksiyon ilk T süre için tanmlanmıştır. Bu fonksiyonun k periyot kadar sağa ötelenmesi durumunda pencerelenmiş fonksiyon

$$f_T(t-kT)u_{kT}(t) = \begin{cases} f(t-kT), & kT \leq t \leq (k+1)T \\ 0, & \text{aksi durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda $[0, nT]$ süresi içinde ötelenmiş fonksiyonların toplanması f_{nT} şeklinde gösterilebilir:

$$f_{nT}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_T(t-kT)u_{kT}(t).$$



Bu durumda fonksiyonun tümü

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t - nT) u_{nT}(t)$$

şeklinde gösteriebilir.

Teorem f, $[0, T]$ aralığında parçalı sürekli, T periyodik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_T(s)}{1 - e^{sT}} = \frac{\int_0^T e^{-sT} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}.$$

İspat: Biliyoruz ki

$$\mathcal{L}\{f_T(t - kT)u_{kT}(t)\} = e^{-kTs}\mathcal{L}\{f_T(t)\} = e^{-kTs}F_T(s)$$

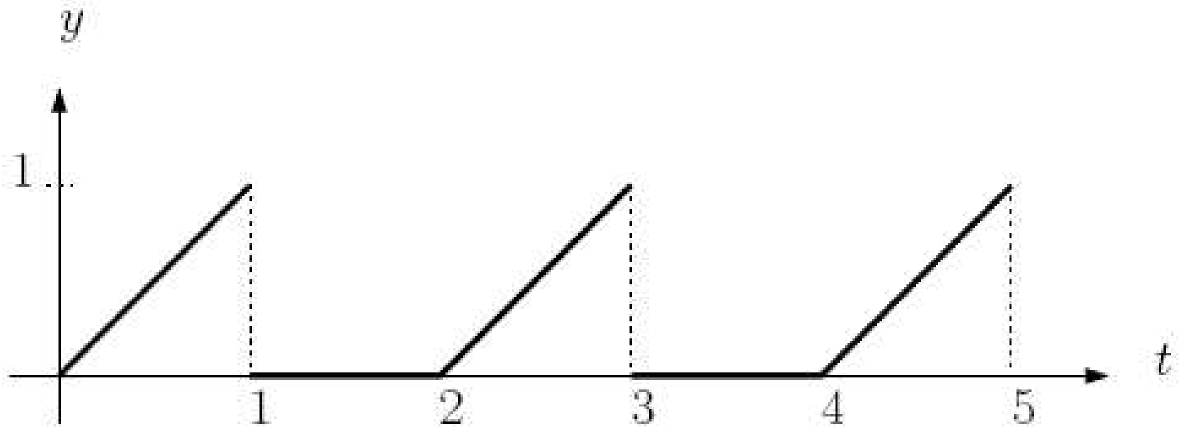
şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan Laplace dönüşümünün lineer oluşundan dolayı,

$$\begin{aligned} F_{nT}(s) &= \int_0^{nT} e^{-st} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}\{f_T(t - kT)u_{kT}(t)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTs}F_T(s) = F_T(s)\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-sT}\right)^k = F_T(s)\frac{1 - (e^{-sT})^n}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

Burada $sT > 0$ olduğu düşünülürse $e^{-sT} < 1$ olur. Bu durumda

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{nT} e^{-sT} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} F_T(s) \frac{1-(e^{-sT})^n}{1-e^{-sT}} = \frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

Örnek: Aşağıdaki şekilde verilen fonksiyonun Laplas dönüşümünü bulunuz.



$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Şekildeki fonksiyonun periyodu 2 dir, T=2.

$$F_T(s) = \int_0^2 e^{-st} f(t)dt = \int_0^1 s^{-st} t dt = \frac{1-e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1-e^{-2s})} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun ters Laplas dönüşümünü hesaplayınız

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

Çözüm: Açıktırki paydada bulunan $(1-e^{-2s})$ şeklindeki terim bu ifadenin periyodik, hatta periyodununda $T = 2$ olduğunu ortaya koymaktadır. Bu durumda

$$F_T(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{F_1(s)} - \underbrace{\frac{e^{-s}}{s}}_{F_2(s)}$$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s}\} = u_1(t)$ olduğundan

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$ elde edilir.

Son değer teoremi Bu teorem bir fonksiyonun kararlı hal değerinin s-tanım bölgesinde hesaplanmasında kullanılır. Şayet $sY(s)$'in tüm kutupları s-düzleminin solunda ise

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

Otomatik Kontrol

Fiziksel Sistemlerin Modellenmesi

- Elektriksel Sistemeler
- Mekaniksel Sistemler

Kontrol sistemlerinin analizinde ve tasarımında en önemli noktalardan bir tanesi sistemlerin matematiksel ifade edilmesidir.

Transfer fonksiyonu metodu ve durum değişkenleri metodu en çok kullanılan modelleme yöntemidir.(Transfer fonksiyonu metodu sadece lineer sistemlere uygulanabilir.)

Transfer Fonksiyonu:

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek bir sistemin cevap fonksiyunu (çıkışı) ile sürücü fonksiyonu (girişi) arasındaki Laplas transformasyonları oranına transfer fonksiyonu denir.

Transfer fonksiyonu sistemin dinamik karakteristiklerini tanımlar. Sistem özelliğidir. Sistemin fiziksel yapısı hakkında bilgi vermez, farklı fiziksel sistemlerin transfer fonksiyonları aynı olabilir.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}} \longrightarrow C(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots b_0)}{(a_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots a_0)}$$

Örnek: $\dfrac{dx}{dt} + 2x = r(t)$ için transfer fonksiyonunu oluşturunuz.

Başlangıç koşullarını 0 kabul ederek iki tarafın Laplas dönüşümünü alalım:

$$sX(s) + 2X(s) = R(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} \quad = \frac{1}{s+2}$$

Elektriksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları

Elektriksel sistemlerin modellenmesinde linneer ve pasif üç devre elemanı yaygın olarak kullanılır.

Direnç, Endüktans ve Kapasitans

Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\,d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t)$ = V (volts), $i(t)$ = A (amps), $q(t)$ = Q (coulombs), C = F (farads), R = Ω (ohms), G = ℧ (mhos), L = H (henries).

Kapasitör için:

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

Direnç için:

$$V(s) = RI(s)$$

Endüktör için:

$$V(s) = LsI(s)$$

Transfer fonksiyonu tanımlayacak olursak:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s)$$

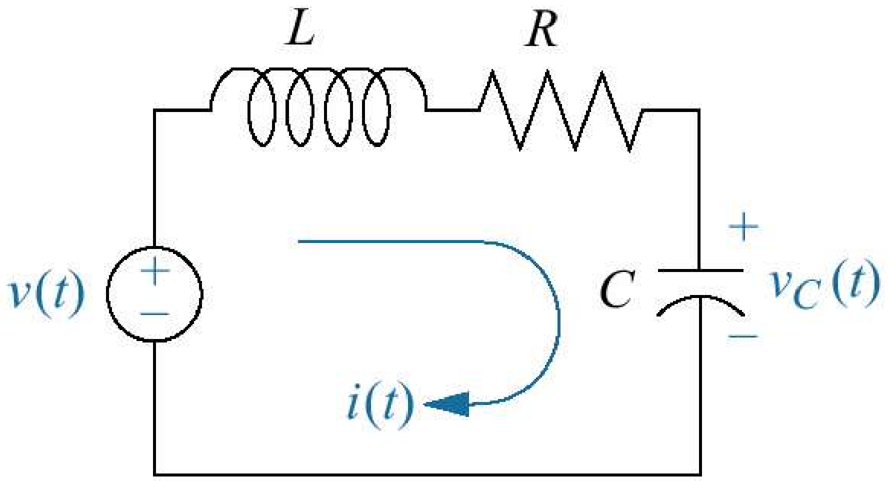
Elektriksel devrelerin matematiksel modellenmesinde Kirchhoff yasalarından faydalanılır:

Bir kapalı çevrimdeki gerilimlerin cebirsel toplamı sıfırdır.

Bir noktaya gelen ve noktadan çıkan akımların cebirsel toplamı sıfırdır.

Bu ilişkiler kurulduktan sonra devre için diferansiyel denklemler yazılır. Daha sonra Laplas dönüşümü yapılır ve transfer fonksiyonu elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki devrede kapasitör gerilimi $V_c(s)$ ve giriş gerilimi V(s) yi ilişkilendiren transfer fonksiyonunu yazınız.



Kontrol tasarımcısı ilk önce giriş ve çıkışı belirlemelidir. Ancak bu örnekte giriş ve çıkış bize verilmiştir. Giriş ugulanan V(t) gerilimi çıkış ise kapasitör gerilimi, $V_c(t)$.

1. Yöntem Kirchhoff Gerilimler Yasası:

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=v(\tau)$$

Başlangıç koşullarını sıfır kabul ederek Laplas dönüşümünü yapalım:

$$RI(s)+LsI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)=V(s)$$

Denklemi düzenleyecek olursak:

$$V(s)=(R+Ls+\frac{1}{Cs})I(s)$$

Dikkat edilecek olursa uygulanan gerilim; çevrimdeki devre elemanlarının empedansları toplamı ile devre akımının çarpımıdır.

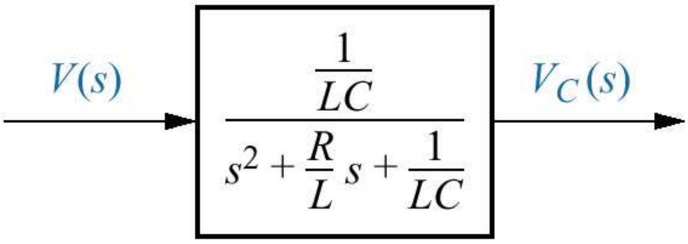
$$I(s)=\frac{V(s)}{(R+Ls+\frac{1}{Cs})}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}$$ ‘i elde etmeye çalışıyoruz.

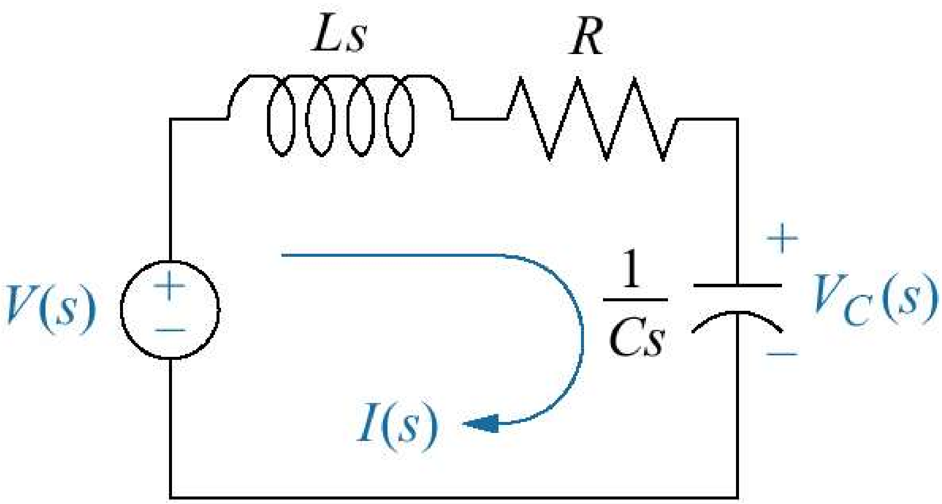
$$V_c(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$

$$V_c(s)=\frac{1}{Cs}\frac{V(s)}{(R+Ls+\frac{1}{Cs})} \qquad \frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{1}{Cs}\frac{1}{(\frac{RCs+LCs^2+1}{Cs})}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$



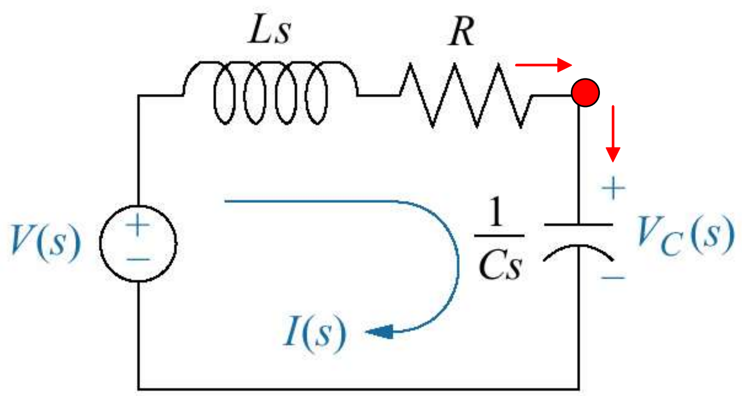
Aslında devreyi çözmeye başlamadan devre elemanlarının devre üzerinde empedans değerlerini yazabiliriz.



2. Yöntem Kirchhoff Akımlar Yasası:

Bir noktadan çıkan akımları pozitif, noktaya gelen akımları negatif kabul edeceğiz.

Bizim devremizde akımlar; kapasitör içinden geçen akım ve seri bağlı direnç ve endüktörden geçen akımdır.



$$\frac{V_c(s)}{\frac{1}{Cs}}+\frac{V_c(s)-V(s)}{R+Ls}=0$$

Çözecek olursak:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

3. Yöntem Gerilim Bölücü:

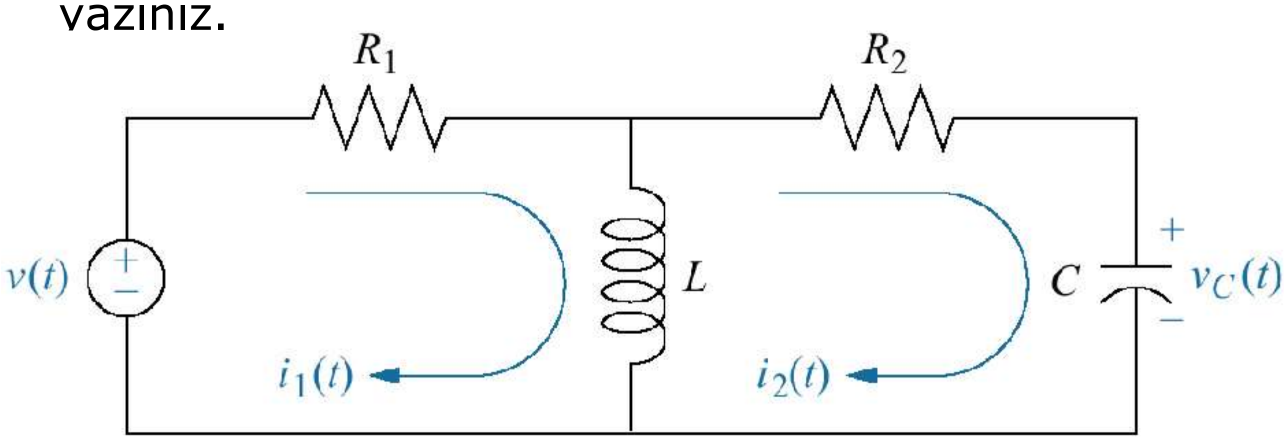
Kapasitör uçlarındaki gerilim uygulanan gerilimin bir kısmıdır. Dolayısıyla kapasitör empedansını toplam empedansa bölerek kapasitör gerilimini bulabiliriz.

$$V_c(s)=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+Ls+\frac{1}{Cs}}V(s)$$

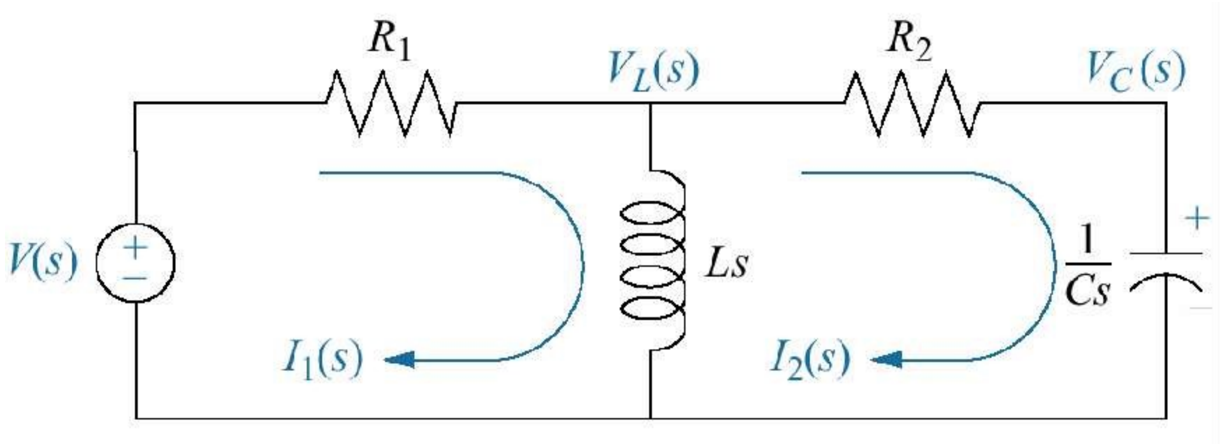
Bu örnekte tek çevreli bir elektriksel devremiz vardı, fakat çoğu elektriksel devreler birden çok döngü içerirler. Çok çevreli devrelerin transfer fonksiyonlarını elde edebilmek için:

1. Devre elemanlarının empedans değerleri yazılır
2. Çevre akımının yönü seçilir
3. Çevrede Kirşof gerilimler yasası uygulanır
4. Çıkışı elde etmek için denklemler sırasıyla çözülür
5. Transfer fonksiyonu oluşturulur

Örnek: Aşağıdaki devrede $I_2(s)/V_2(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız.



Başlangıç koşullarını sıfır varsayarak devre elemanlarının empedanslarını yazalım



1. Çevrimde
$$R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$

2. Çevrimde
$$LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) = 0$$

$I_1(s)$ ve $I_2(s)$ li terimleri birlikte yazacak olursak;

$$(R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$
$$-LsI_1(s) + (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs})I_2(s) = 0$$

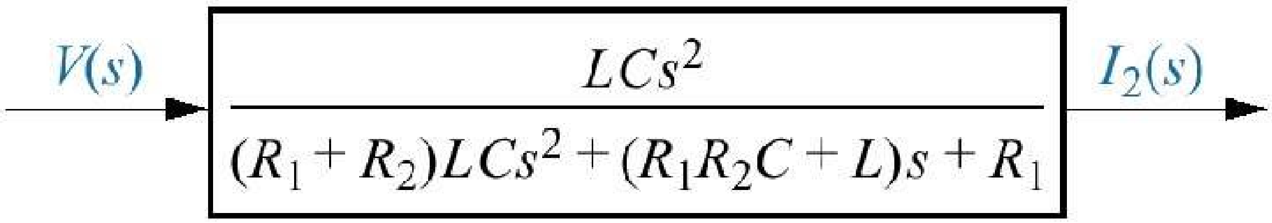
$I_2(s)$ i Çözmek için kramer yasasını kullanacak olursak;

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -Ls \\ -Ls & (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) \end{vmatrix}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & V(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{LsV(s)}{\Delta}$$

Transfer Fonksiyonu: $G(s) = \dfrac{I_2(s)}{V(s)}$

$$G(s) = \frac{\dfrac{LsV(s)}{\Delta}}{V(s)} = \frac{Ls}{\Delta} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$



(1. Çevrimdeki empedansların toplamı) I_1 - (Ortak empedansların toplamı) I_2 = (1. Çevrimde uygulanan Gerilimlerin toplamı)

- (Ortak empedansların toplamı) I_1 + (2. Çevrimdeki empedansların toplamı) I_2 = (2. Çevrimde uygulanan Gerilimlerin toplamı)

Çoğu zaman transfer fonksiyonunun bulunması için en kolay yöntem çevre gerilimleri değil, düğüm akımları yöntemidir. Diferansiyel denklemlerin sayısı gerilimleri bilinmeyen düğümlerin sayısı kadardır. Düğüm denklemlerini yazarken devre elemanlarını admitans olarak göstermek kolaylık sağlar.

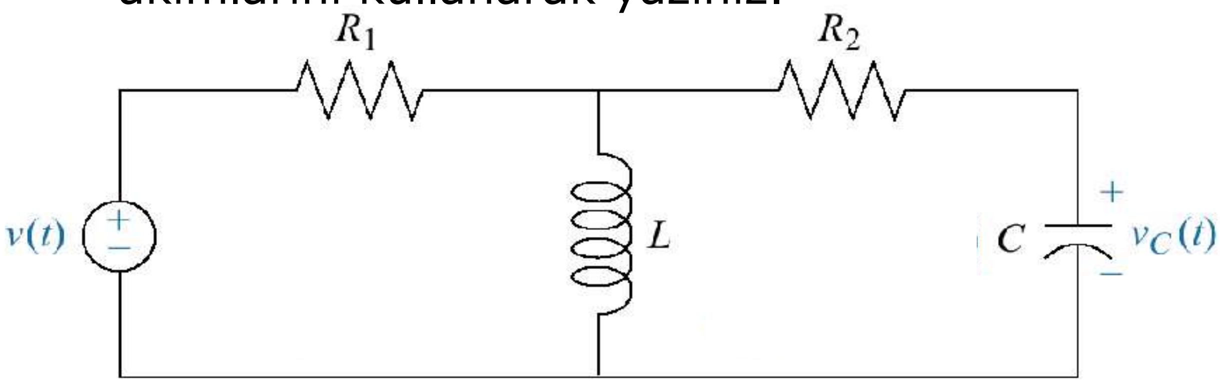
Admitans : Empedansın çarpmaya göre tersidir ve Y(s) ile gösterilir;

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)}$$

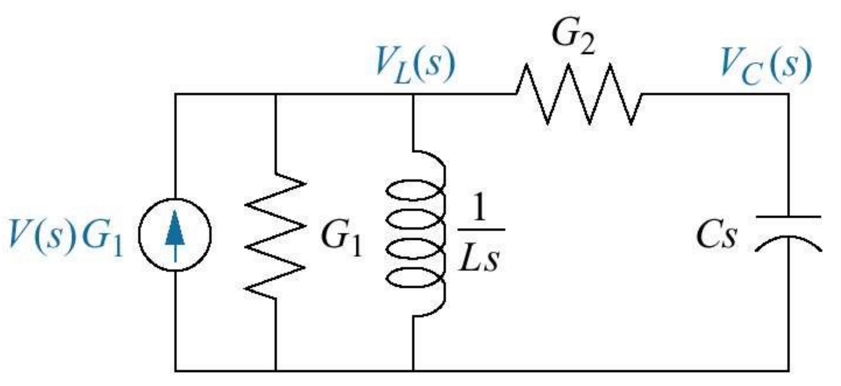
Düğüm akımları ile transfer fonksiyonunu elde edeceksek:

1. Devre elemanlarının admitans değerleri yazılır.
2. Gerilim kaynakları akım kaynakları cinsinden yazılır. (Eğer kolaylık sağlayacaksa)
3. Düğüme Kirchhoff akımlar yasası uygulanır.
4. Çıkışı elde etmek için denklemler sırasıyla çözülür.
5. Transfer fonksiyonu oluşturulur.

Örnek: Aşağıdaki devrede $V_c(s)/V(s)$ transfer fonksiyonunu nod akımlarını kullanarak yazınız.



Gerilim kaynağını akım kaynağına, empedansları admitanslara dönüştürelim.



$$I(s)=Y(s)V(s)$$

$$G_1V_L(s)+\frac{1}{Ls}V_L(s)+G_2[V_L(s)-V_C(s)]=V(s)G_1$$

Vc(s) düğümündeki akımların toplamı:

$$CsV_C(s)+G_2[V_C(s)-V_L(s)]=0$$

$V_L(s)$ ve $V_C(s)$'leri düzenleyelim:

$$\left(G_1+G_2+\frac{1}{Ls}\right)V_L(s)-G_2V_C(s)=V(s)G_1$$

$$-G_2V_L(s)+\left(G_2+Cs\right)V_C(s)=0$$

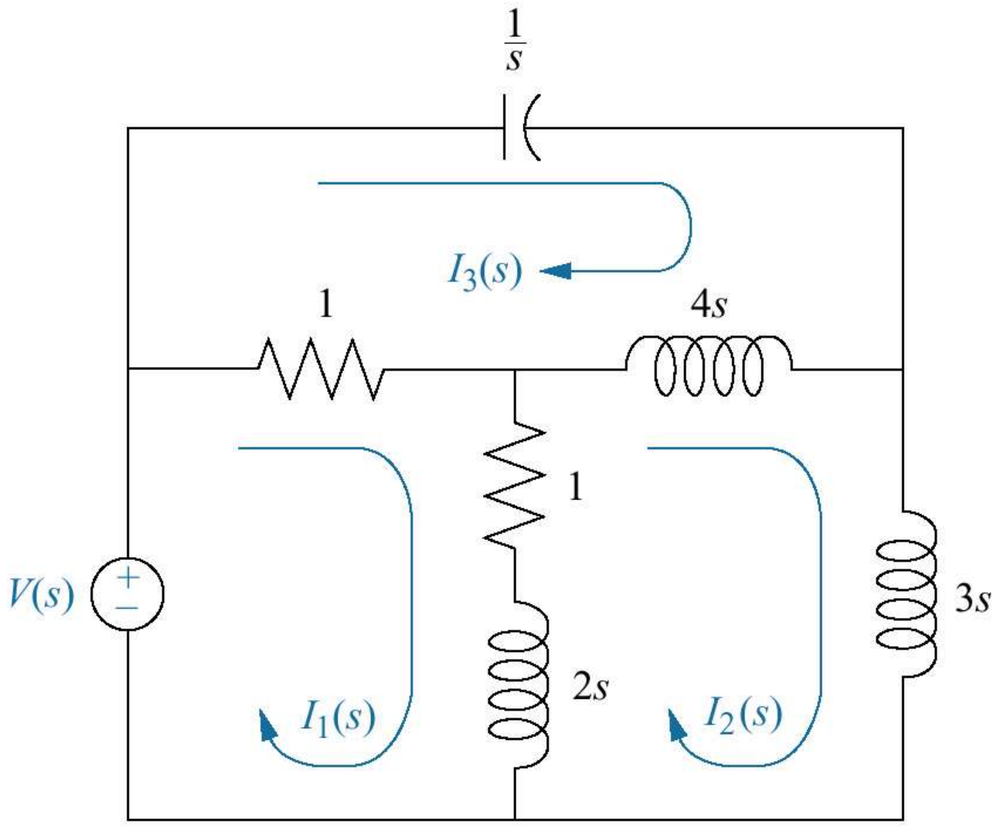
Sırayla çözdüğümüzde transfer fonksiyonu:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{\frac{G_1G_2}{C}s}{\left(G_1+G_2\ s\right)^2+\frac{G_1G_2L+C}{LC}s+\frac{G_2}{LC}}$$

(1.düğüme bağlı admitansların toplamı) V_L - (Ortak admitansların toplamı) V_C = (1.düğüme uygulanan akımların toplamı)

- (Ortak admitansların toplamı) V_L + (2.düğüme bağlı admitansların toplamı) V_C = (2.düğüme uygulanan akımların toplamı)

Örnek: Aşağıdaki devrede çevre denklemlerini yazınız.



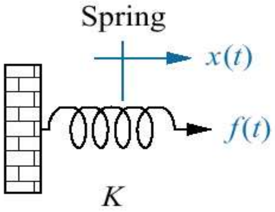
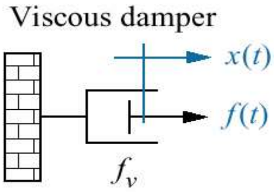
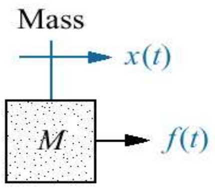
	1. Çevredeki empedansların toplamı	I_1 -	1. ve 2. Çevredeki ortak empedansların toplamı	I_2 -	1. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı	I_3 =	1. Çevrede uygulanan Gerilimlerin toplamı
-	1. ve 2. Çevredeki ortak empedansların toplamı	I_1 +	2. Çevredeki empedansların toplamı	I_2 -	2. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı	I_3 =	2. Çevrede uygulanan Gerilimlerin toplamı
-	1. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı	I_1 -	2. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı	I_2 +	3. Çevredeki empedansların toplamı	I_3 =	3. Çevrede uygulanan Gerilimlerin toplamı

$$(2s+2)I_1(s) - (2s+1)I_2(s) - I_3(s) = V(s)$$

$$-(2s+1)I_1(s) + (9s+1)I_2(s) - 4sI_3(s) = 0$$

$$-I_1(s) - 4sI_2(s) + \left(4s+1+\frac{1}{s}\right)I_3(s) = 0$$

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları (Düzlemsel Hareket)

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedance $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)\,d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $f(t)$ = N (newtons), $x(t)$ = m (meters), $v(t)$ = m/s (meters/second), K = N/m (newtons/meter), f_v = N-s/m (newton-seconds/meter), M = kg (kilograms = newton-seconds^2/meter).

Mekaniksel sistemler ile elekriksel sistemler arasında analoji oluşturmamız mümkündür.

Örneğin, uygulanan kuvvet, uygulanan gerilimin; hız, akımın; yer değiştirme de yük'ün karşılığıdır.

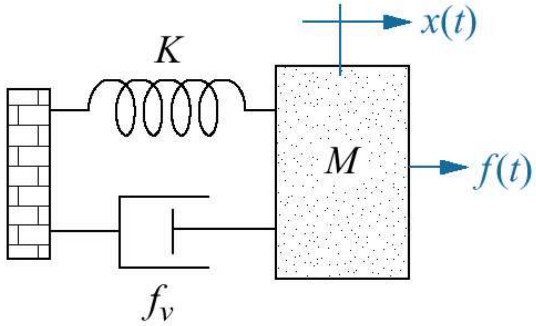
Mekaniksel Empedans: $$Z_M(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$$

Yay elemanı: $$F(s) = KX(s)$$

Sönüm elemanı: $$F(s) = f_v sX(s)$$

Kütle: $$F(s) = Ms^2X(s)$$

Örnek:



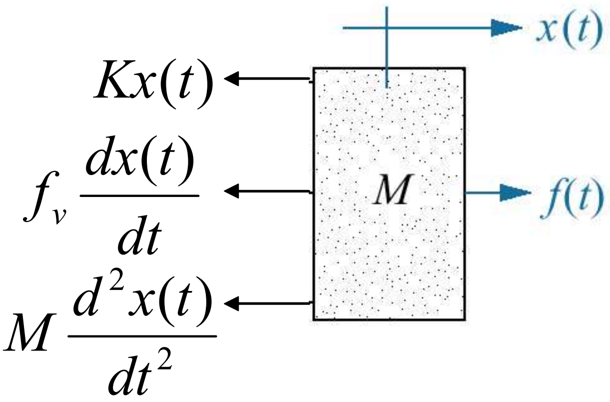
X(s)/F(s) transfer fonksiyonunu bulunuz.

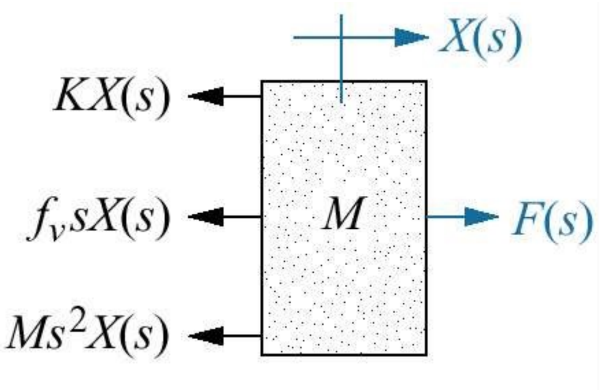
RLC devresine benziyor, mekaniksel sistemelerde diferansiyel denklem hareket denklemi ile yazılır ve bu mekaniksel sistemi tanımlar.

Elektriksel devrelerde akım nıyönünü biz seçtiğimiz gibi mekaniksel sistemlerde de hareketin pozitif yönünü belirleriz ve serbest cisim diyagramını çizeriz.

Serbest cisim diyagramında cisme etkiyen tüm kuvvetler ve pozitif hareket yönü gösterilir. Kuvvetler zaman tanım aralığında veya Laplas dönüşümü ile(sıfır başlangıç koşulu varsayılarak) gösterilebilir.

Newton yasası uygulanarak, kuvvetler toplanır ve sıfıra eşitlenir.



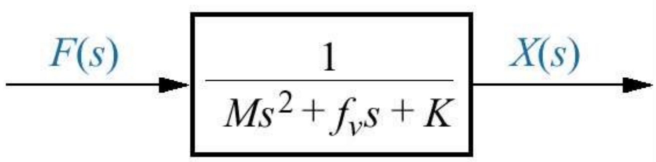


Kuvvetleri toplayıp sıfıra eşitleyecek olursak;

$$Ms^2X(s) + f_v sX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$\left(Ms^2 + f_v s + K\right)X(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}$$



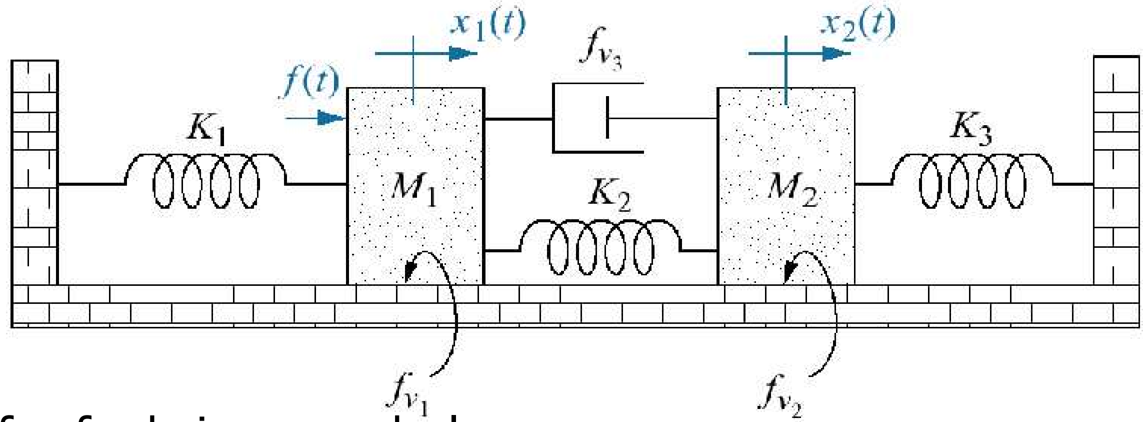
Çoğ u mekaniksel sistemler, çok çevrimli çok düğümlü elektriksel devrelere benzemektedir ve sistemi tanımlamak için birden fazla diferansiyel denklem gerekir.

Mekaniksel sistemlerde gerekli olan hareket denklemlerinin sayısı, lineer olarak bağımsız hareketlerin sayısına eşittir.

Lineer bağımsızlığın manası hareket noktasının diğer hareket noktaları sabitlendiği halde hareket edebilmesidir. Lineer bağımsızlığın bir diğer manası serbestlik derecesidir.

Eletriksel sistemlerden örnek verecek olursak; iki çevreli bir devrede her bir akım diğer çevrenin akımının etkisi altındadır. Eğer çevrelerden birini açık devre yaparsak, diğer çevrede gerilim kaynağı varsa o çevrede akım akmaya devam eder.

Örnek:

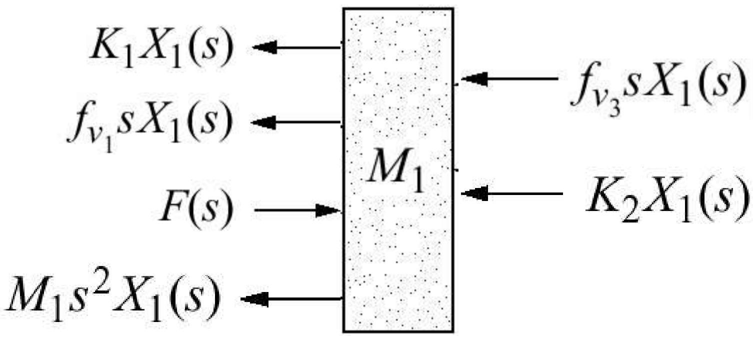


X(s)/F(s) transfer fonksiyonunu bulunuz.

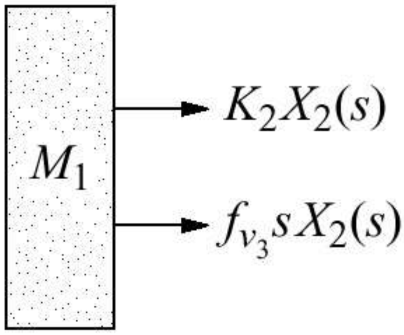
Her iki kütle yatay doğ rultuda biri sabit iken hareket ettirilebileceği için sistemin serbestlik derecesi ikidir.

İki denklem iki kütlenin serbest cisim diyagramından elde edilecektir.

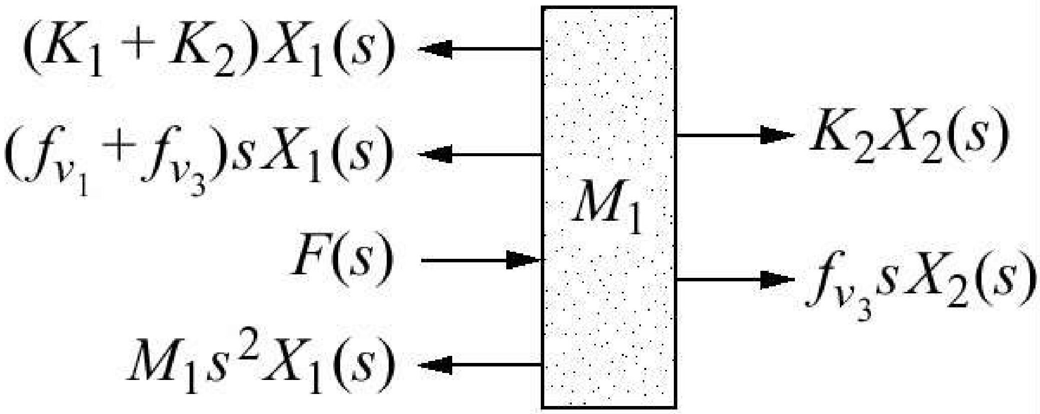
Eğer M_2'yi sabit tutup M_1'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



Eğer M_1'yi sabit tutup
M_2'i sağa doğru hareket
ettirecek olursak

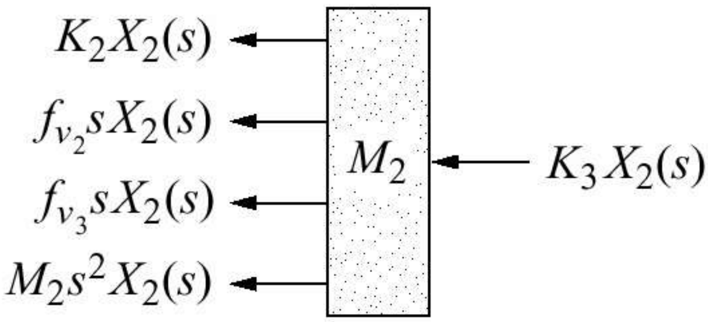


M_1 üzerine süperpozisyon uygulanacak olursa:

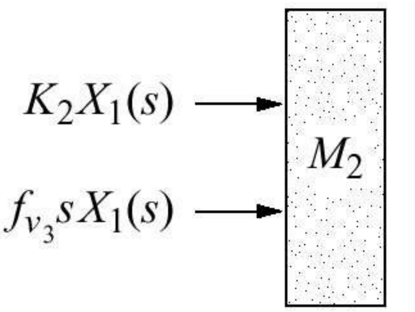


Aynı işlemleri M_2 için
yapalım:

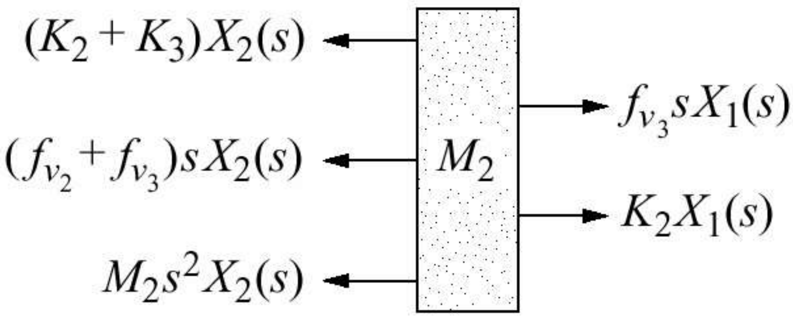
Eğer M_1'yi sabit tutup
M_2'i sağa doğru hareket
ettirecek olursak



Eğer M_2'yi sabit tutup
M_1'i sağa doğru hareket
ettirecek olursak



M_2 üzerine süperpozisyon
uygulanacak olursa:

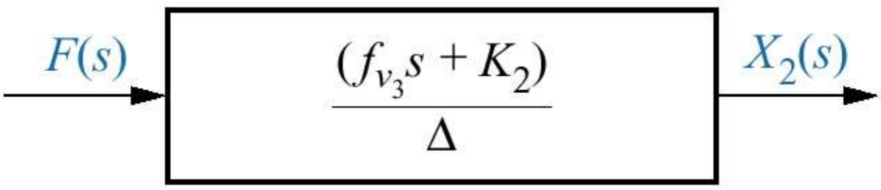


$$\left[M_1s^2+\left(f_{v1}+f_{v3}\right)s+\left(K_1+K_2\right)\right]X_1(s)-\left(f_{v3}s+K_2\right)X_2(s)=F(s)$$

$$-\left(f_{v3}s+K_2\right)X_1(s)+\left[M_2s^2+\left(f_{v2}+f_{v3}\right)s+\left(K_2+K_3\right)\right]X_2(s)=0$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)}=G(s)=\frac{(f_{v3}s+K_2)}{\Delta}$$

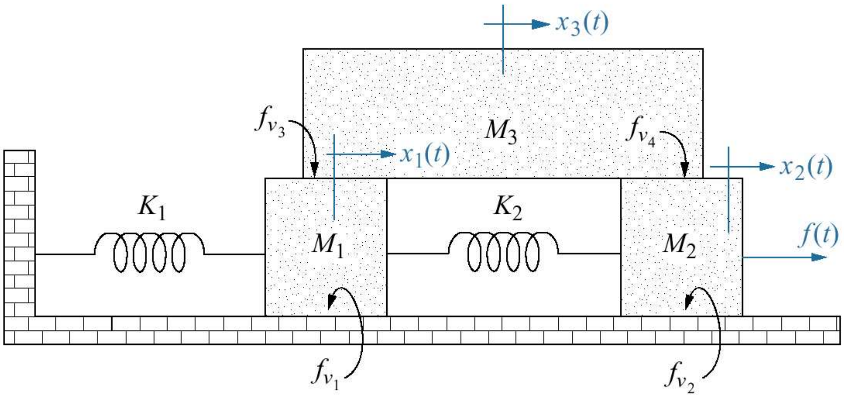
$$\Delta=\begin{bmatrix} M_1s^2+\left(f_{v1}+f_{v3}\right)s+\left(K_1+K_2\right) & -\left(f_{v3}s+K_2\right) \\ -\left(f_{v3}s+K_2\right) & M_2s^2+\left(f_{v2}+f_{v3}\right)s+\left(K_2+K_3\right) \end{bmatrix}$$



(X1 deki harekete bağlı empedansların toplamı) X_1 - (X1 ve X2 deki ortak empedansların toplamı) X_2 = (X1'e uygulanan Kuvvetlerin toplamı)

- (X1 ve X2 deki ortak empedansların toplamı) X_1 + (X2 deki harekete bağlı empedansların toplamı) X_2 = (X2'e uygulanan Kuvvetlerin toplamı)

Örnek:



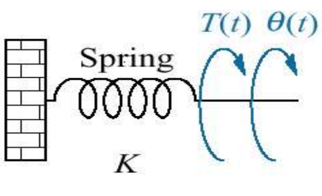
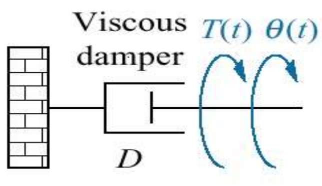
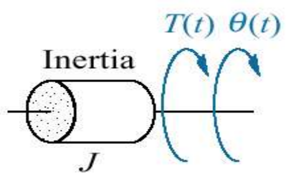
Yukarıdaki mekaniksel sistemin hareket denklemlerini yazınız.

$$\left[M_1 s^2 + \left(f_{v1} + f_{v3}\right)s + \left(K_1 + K_2\right)\right]X_1(s) - K_2 X_2(s) - f_{v3} s X_3(s) = 0$$

$$-K_2 X_1(s) + \left[M_2 s^2 + \left(f_{v2} + f_{v4}\right)s + K_2\right]X_2(s) - f_{v4} s X_3(s) = F(s)$$

$$-f_{v3} s X_1(s) - f_{v4} s X_2(s) + \left[M_3 s^2 + \left(f_{v3} + f_{v4}\right)s\right]X_3(s) - f_{v4} s X_3(s) = 0$$

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları (Dairesel Hareket)

Component	Torque-angular velocity	Torque-angular displacement	Impedance $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\frac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
	$T(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $T(t)$ = N-m (newton-meters), $\theta(t)$ = rad (radians), $\omega(t)$ = rad/s (radians/second), K = N-m/rad (newton-meters/radian), D = N-m-s/rad (newton-meters-seconds/radian), J = kg-m^2 (kilogram-meters^2 = newton-meters-seconds^2/radian).

Dairesel hareket eden mekaniksel sistemler düzlemsel hareket eden mekaniksel sistemler gibi ele alınır. Kuvvet'in yerini tork, düzlemsel yer değiştirmenin yerini açısal yer değiştirme alır. Ayrıca kütle yerine atalet ifadesi kullanılır.

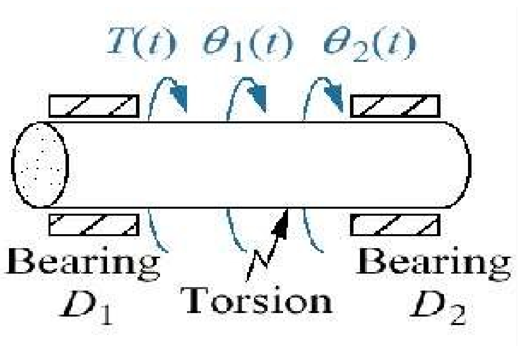
Serbestlik derecesi ise düzlemsel harekette yer değiştirme ile belirlenirken dairesel harekette dönebilme ile belirlenir.

Önce, hareket noktalarını sabit tutularak cismi döndürürüz ve oluşacak torkları serbest cisim diyagramı üzerinde gösteririz.

Sonra cismi sabitleyip sırasıyla bitişik hareket noktaları döndürülerek oluşacak torklar serbest cisim diyagramında gösterilir. Her bir hareket noktası için bu işlem tekrarlanır.

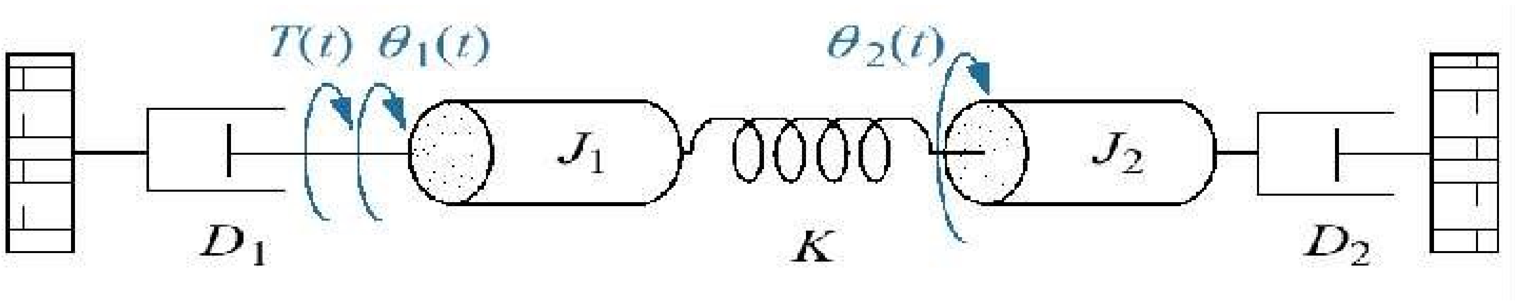
Tüm serbest cisim diyagramlarında tork'lar toplanır ve sıfıra eşitlenir.

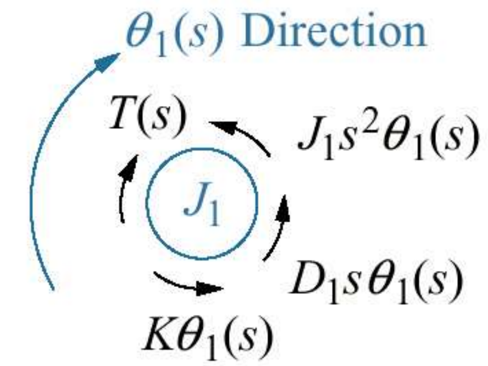
Örnek:



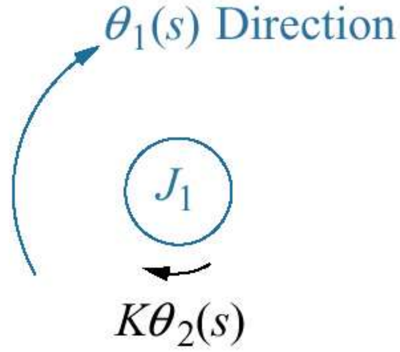
Sistemin, $\theta_2(s)/T(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız. Çubuk her iki taraftan yataklanmıştır ve burulmaya maruz kalmaktadır. Sağ tarafa tork uygulanırken yer değiştirme sol taraftan ölçülmektedir.

Burada çubuğun burulmasını iki atalet arasında bulunan yay gibi düşünebiliriz.

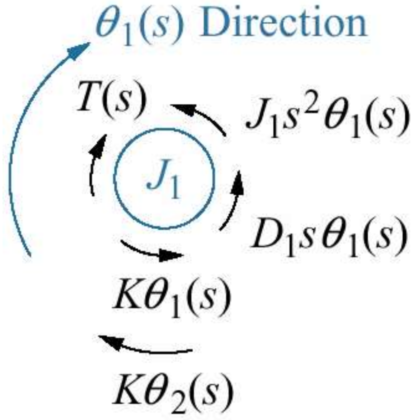




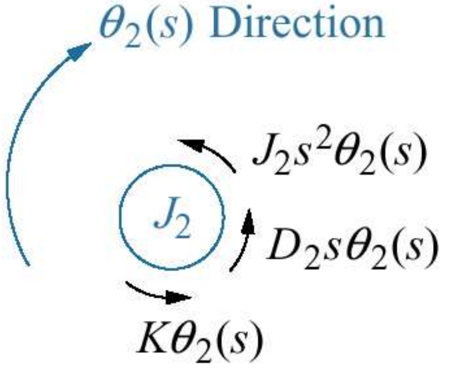
J_1 üzerindeki J_1'nın hareketiyle oluşan Torklar



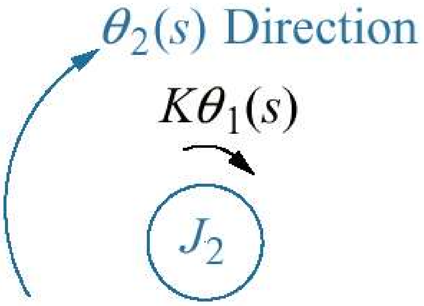
J_1 üzerindeki J_2'nın hareketiyle oluşan Torklar



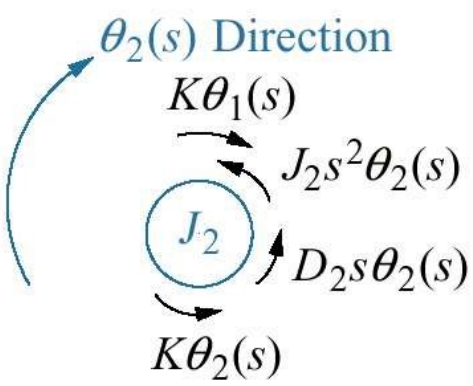
J_1 üzerindeki oluşan toplam Torklar



J_2 üzerindeki J_2'nın hareketiyle oluşan Torklar



J_2 üzerindeki J_1'nın hareketiyle oluşan Torklar



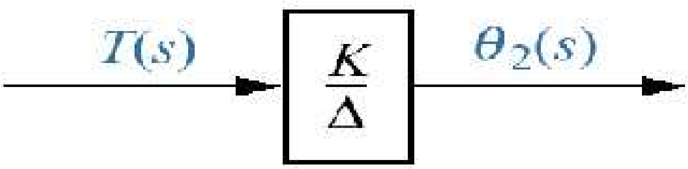
J_2 üzerindeki oluşan toplam Torklar

Her iki ataletteki torkları topladığımızda, hareket denklemini elde ederiz:

$$\left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right)\theta_1(s) - K\theta_2(s) = T(s)$$

$$-K\theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right)\theta_2(s) = 0$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{\Delta}$$

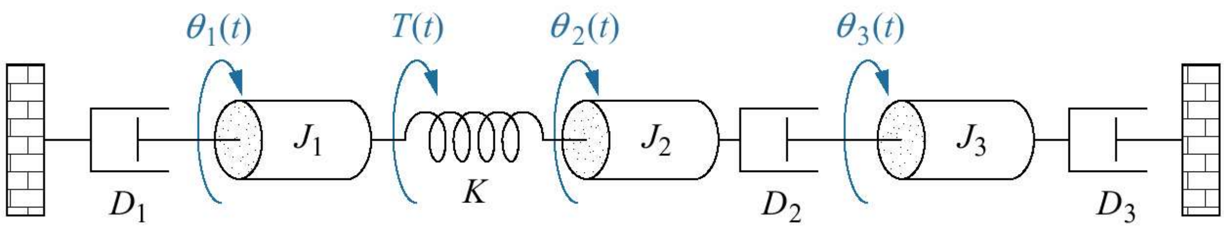


$$\Delta = \begin{bmatrix} \left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right) & -K \\ -K & \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 - \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 = \begin{pmatrix} \theta_1\text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} \theta_2 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 = \begin{pmatrix} \theta_2\text{'ye uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

Örnek:



Hareket denklemlerini doğrudan yazınız.

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 - \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 - \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1\text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} \theta_2 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 - \begin{pmatrix} \theta_2 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_2\text{'ye uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 - \begin{pmatrix} \theta_2 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 + \begin{pmatrix} \theta_3 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_3\text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

$$\left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right)\theta_1(s) - K\theta_2(s) - 0\theta_3(s) = T(s)$$

$$-K\theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right)\theta_2(s) - D_2 s\theta_3(s) = 0$$

$$-0\theta_1(s) - D_2 s\theta_2(s) + \left(J_3 s^2 + D_3 s + D_2 s\right)\theta_3(s) = 0$$

Kaynaklar

1. Modern Control Systems, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Addison Wesley, 1998
2. Otomatik Kontrol Sistemleri, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999
3. Modern Control Engineering, K.OGATA, Prentice-Hall, 1997
4. Automatic Control Systems, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley,2
5. Control System Engineering, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.5
6. Feedback and Control Systems, Joseph J.Distefano, Allen R.Stubberrud, Ivan J.Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.
7. Ders Notları için İnternet Adresi: http://www.tuncayuzun.com/ , http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/
8. Otomatik Kontrol Ders Notları, Prof.Dr. Galip CANSEVER, YTÜ, 2007.