EHM3132 Gr.1

Otomatik Kontrol

Bölüm 3
Transfer Fonksiyonu, Blok Diyagramlar, İşaret Akış Diyagramları

Transfer Fonksiyonu

Doğrusal zamanla değişmeyen diferansiyel denklem sisteminin tüm ilk koşulları sıfır varsayılması durumunda, sistemin çıkışının (yanıt fonksiyonunun), girişine (sürücü fonksiyonun) Laplace dönüşümleri oranına transfer fonksiyonu denir.

Not:Bu ders kapsamında doğrusal zamanla değişmeyen tek giriş tek çıkışlı (SISO, Single Input Single Output) sistemler kullanılacaktır.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}} \longrightarrow C(s)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}$$

Transfer Fonksiyonunun Özellikleri:

1. Bir fiziksel sistemin Transfer Fonksiyonu (TF), aynı zamanda o sistemin matematiksel modelidir.
2. Transfer Fonksiyonu, giriş veya süren fonksiyonun genliğinden ve doğasından bağımsız olarak sistemin kendi özelliğidir. *Not:TF payda polinomu karakteristik denklem olarak adlandırılır ve doğrusal zamanla değişmeyen tek girişli tek çıkışlı bir sistemin kararlılığı bu karakteristik denklemin kökleriyle belirlenebilir.*
3. TF bir sistemi girişten çıkışa bağlamak için gerekli birimleri içerir. Bununla beraber, sistemin fiziksel yapısı ile ilgili herhangi bir bilgi sağlamaz. Fiziksel olarak farklı olan sistemlerin TF aynı olabilir.
4. Eğer bir sistemin TF biliniyorsa, değişik girişler için sistemin çıkışı veya yanıtı hesaplanabilir, elde edilebilir.
5. Eğer bir sistemin TF bilinmiyorsa, bilinen girişler için sistemin çıkışı veya yanıtı deneysel olarak elde edilebilir.

Blok Diyagramlar

Bir sistemin Blok Diyagramı: sistemde bulunan her bir birimin fonksiyonunun ve işaretlerin akışının, blok adı verilen alt birimlerle çizim olarak gösterimidir.

Blok Diyagramların Özellikleri:

1. Fonksiyonel blok (=Blok) çıkışı ile girişi arasındaki matematiksel bir işlemin sembolüdür.
2. Bir sistemin blok diyagramında bulunan bütün değişkenler birbirlerine fonksiyonel bloklar ile bağlanır.

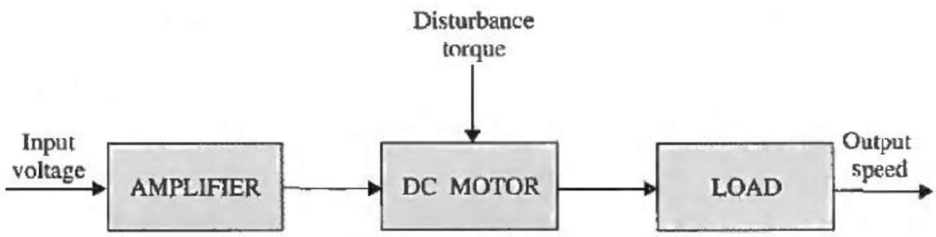
- Açık çevrim sistemin blok diyagramı
- Kapalı çevrim sistemin blok diyagramı
- Açık çevrim sistemin transfer fonksiyonu ve ileri yönde TF
- Kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonu
- Bozucu etken içeren Kapalı çevrim sistemi

Blok Diyagram Çizimi Adımları:

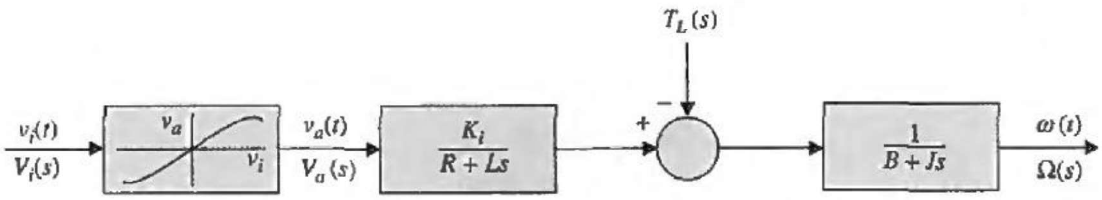
1. Her bir elemanın dinamiğini açıklayan denklemler yazılır.
2. Bu denklemlerin Laplace dönüşümü alınır. *Not:ilk koşullar sıfır*
3. Bunların ayrı ayrı fonksiyonel blok diyagramı gösterilir.
4. Tam bir blok diyagramı oluşturmak üzere fonksiyonel bloklar (elemanlar) birleştirilir.

Blok Diyagram İndirgeme Kuralları:

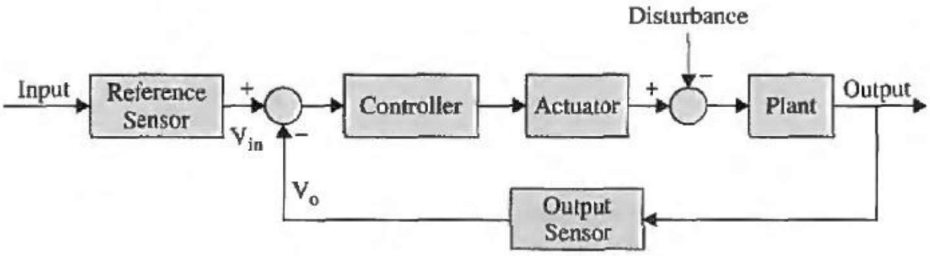
1. İleriye doğru olan TF'nun sonucu aynı kalmalıdır.
2. TF'nun döngü çevrimleri aynı kalmalıdır.



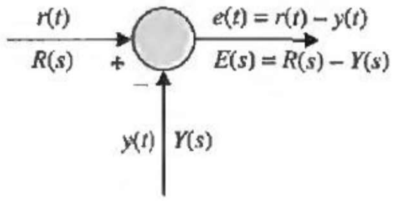
Şekil 3-2. a) *Bir doğru akım motor kontrol sistemi blok diyagramı*



b) *Transfer fonksiyonlu ve kuvvetlendirici karakteristikli blok diyagramı*



Şekil 3-2. *Bir doğru akım motor kontrol sistemi blok diyagramı*



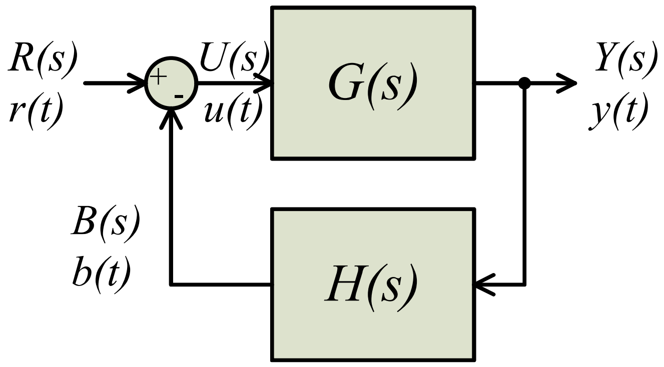
$$\frac{V_a(s)}{V_i(s)} = K$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Geri beslemeli kontrol sisteminin blok diyagramı

Örnek 3-4. *Aşağıda verilen geri beslemeli, kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramının transfer fonksiyonunu elde ediniz.*



$R(s), r(t)$ = *referans giriş (komut),*

$y(t), Y(s)$ = *çıkış (kontrol edilen değişken),*

$b(t), B(s)$ = *geri besleme işareti,*

$u(t), U(s)$ = *etkin hata, ($H(s)=1$ için $e(t)$, $E(s)$ hata işareti)*

$H(s)$ = *geri besleme transfer fonksiyonu*

$G(s)H(s)$ = $L(s)$ = *açık çevrim transfer fonksiyonu*

$G(s)$ = *ileri yol transfer fonksiyonu*

$$M(s) = Y(s)/R(s) = \text{kapalı çevrim yada sistem transfer fonksiyonu}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$
$$B(s) = H(s)Y(s)$$
$$U(s) = R(s) - B(s)$$
$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)B(s)$$
$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)Y(s)$$
$$Y(s)+G(s)H(s)Y(s)= G(s)R(s)$$
$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- **Blok Diyagramı cebirsel işlem tablosu**

İşaret Akış Diyagramları

Bir sistemin İşaret Akış Diyagramı (İAD) bir Blok Diyagramın basitleştirilmiş şeklinin grafik olarak çizimidir.
İAD doğrusal sistemlerde cebirsel denklemlerin neden-etki ilişkisini göstermek üzere S.J. Mason tarafından geliştirilmiştir.
Doğrusal bir sistemin N adet cebirsel denklemle ifade edilmesi durumunda:

$$y_i = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} y_k \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

$$j'\text{inci etki} = \sum_{k=1}^{N} (k'\text{dan } j'\text{ye kazanç}) \times (k'\text{ıncı neden})$$

$$\text{çıkış} = \sum \text{kazanç } \times \text{ giriş}$$

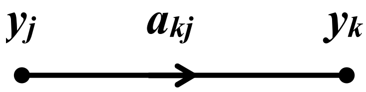
$$Y(s)_i = \sum_{k=1}^{N} G_{kj}(s) Y_k(s) \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

İşaret Akış Diyagramlarının Temel Özellikleri:

- *İAD yalnız doğrusal sistemlere uygulanabilir.*
- *İAD oluşturulurken kullanılacak denklemler neden-etki cebirsel denklemleri biçiminde olmalıdır.*
- *Bağlantı noktaları, **düğümler** değişkenleri ifade eder.*
- *Düğümler, neden-etki denklemleri gereği, doğru parçalarına, **dallarla** bağlıdır. İki düğüm arasındaki işaret dal kazancıyla çarpılır. Buna göre y_k'ye $a_{kj}\,y_j$ işareti iletilir.*
- *Bir işaret dal boyunca sadece **ok** yönünde iletilebilir.*

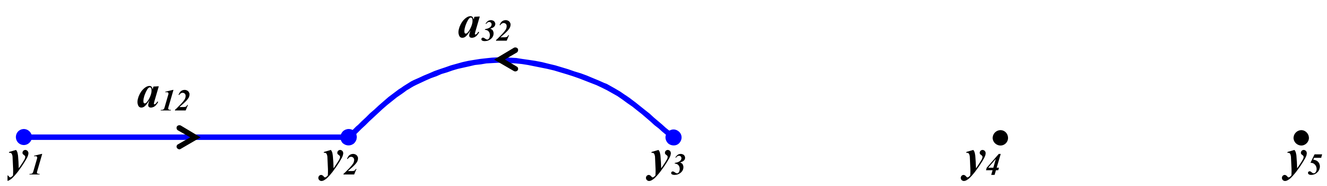
Örneğin y_i giriş, y_k çıkış ve a_{kj} kazanç yada iletkenlik olmak üzere, iki değişken arasındaki İAD gösterimi aşağıdaki gibidir.

$y_k = a_{kj}\,y_j$ *işaret akış diyagramı*

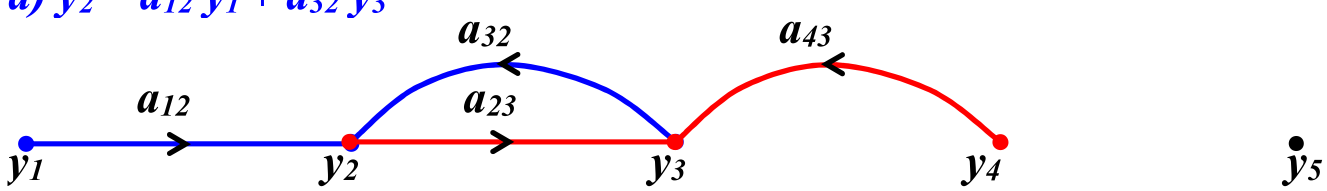


Örnek 3-2. *Aşağıda verilen denklemlere ilişkin işaret akış diyagramını çiziniz.*

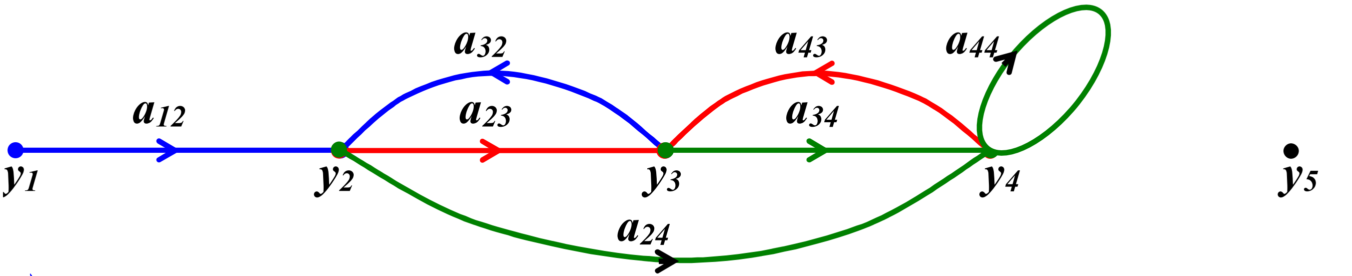
$$y_2 = a_{12}\,y_1 + a_{32}\,y_3$$
$$y_3 = a_{23}\,y_2 + a_{43}\,y_4$$
$$y_4 = a_{24}\,y_2 + a_{34}\,y_3 + a_{44}\,y_4$$
$$y_5 = a_{25}\,y_2 + a_{45}\,y_4$$



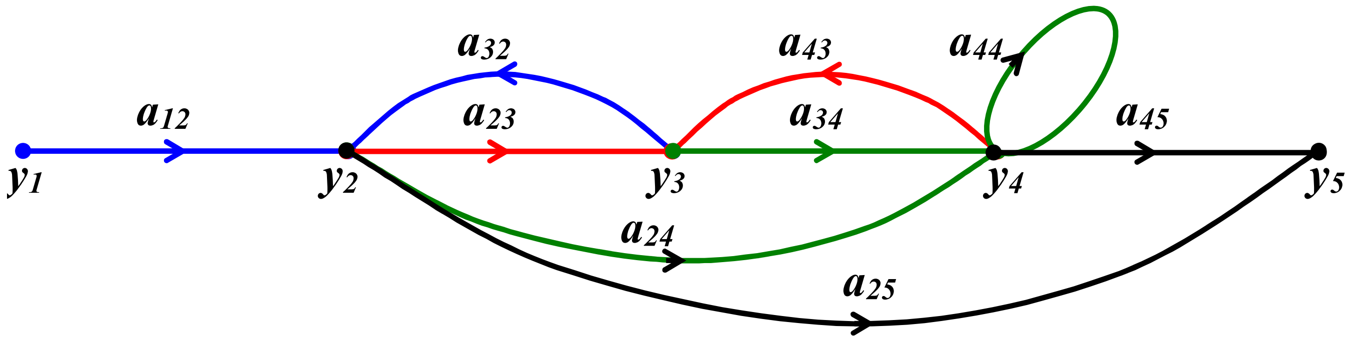
a) $y_2 = a_{12}\,y_1 + a_{32}\,y_3$



b) $y_2 = a_{12}\,y_1 + a_{32}\,y_3$, $y_3 = a_{23}\,y_2 + a_{43}\,y_4$



c) $y_2 = a_{12}\, y_1 + a_{32}\, y_3$, $y_3 = a_{23}\, y_2 + a_{43}\, y_4$, $y_4 = a_{24}\, y_2 + a_{34}\, y_3 + a_{44}\, y_4$



d) İşaret Akış Diyagramının Tamamı

İşaret Akış Diyagramı Terimlerinin Tanımları

Giriş Düğümü (Kaynak): Bir giriş düğümü sadece çıkan dalların bulunduğu bir düğümdür.

Çıkış Düğümü (Çukur): Bir çıkış düğümü sadece giren dalların bulunduğu bir düğümdür. *Not:Ancak bu çıkış düğümü koşulu her zaman sağlanmayabilir.*

Yol: Belirli bir yönde kesintisiz izlenen dallar topluluğundan oluşur.

İleri Yol: Bir giriş düğümünden başlayan, yol boyunca hiç bir düğümden birden fazla geçilmeyen ve çıkış düğümünde sona eren yoldur.

Çevrim: Belirli bir düğümünden başlayan, yol boyunca başka hiç bir düğümden birden fazla geçilmeyen ve aynı düğümde sona eren yoldur.

Yol Kazancı: Bir yol boyunca karşılaşılan dal kazançlarının çarpımıdır.

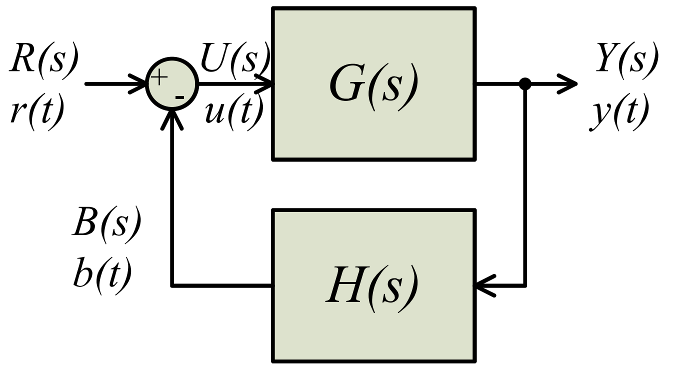
İleri Yol Kazancı: İleri yol kazancıdır.

Çevrim Kazancı: Çevrim kazancıdır.

Temas Etmeyen Çevrim: İAD'nin bir düğümü ortak paylaşmayan iki çevrimidir.

- **İşaret Akış Diyagramı cebirsel işlem tablosu**

Örnek 3-15.*Aşağıda verilen geri beslemeli kontrol sisteminin işaret akış diyagramını çiziniz.*

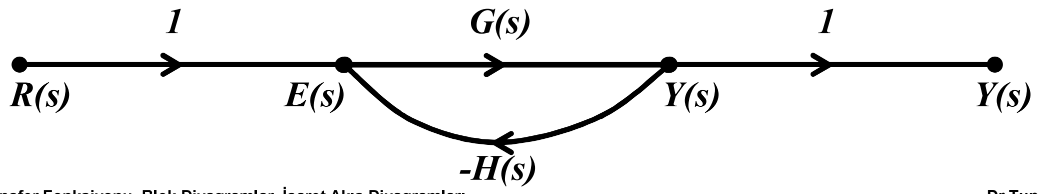


$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s)H(s)$$

$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)Y(s)H(s)$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$



İşaret Akış Diyagramları için Kazanç Formülü

İAD yada blok diyagramı verildiğinde, İAD cebirsel işlemleri kullanılarak, N ileri yolu ve L adet çevrimi bulunan bir sistemin y_g giriş düğümü ile $y_ç$ çıkış düğümü arasındaki kazanç:

$$M = \frac{y_ç}{y_g} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}$$

y_g = giriş düğümü değişkeni,
$y_ç$ = çıkış düğümü değişkeni,
N = y_g ve $y_ç$ arasındaki ileri yol sayısı
M = y_g ve $y_ç$ arasındaki kazanç
M_k = y_g ve $y_ç$ arasındaki k'ıncı yolun kazancı

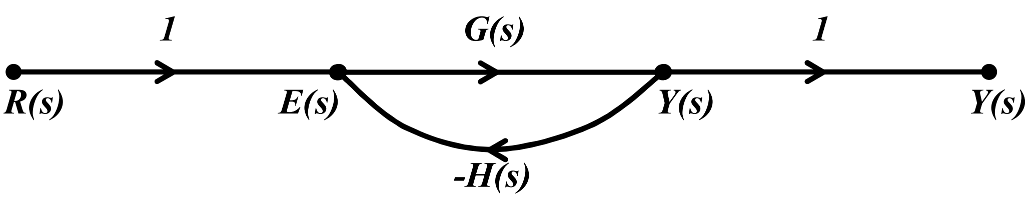
$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \cdots,$$

L_{mr} = r adet ($1 \le r \le L$) temas etmeyen çevrimle oluşan m'inci (m = $i, j, k, \ldots$) kazanç çarpım kombinasyonu

*Δ = 1- (**tüm bireysel** çevrimlerin kazanç toplamı) + (temas etmeyen **ikili** çevrim kombinasyonlarının kazanç çarpımlarının toplamı)+ (temas etmeyen **üçlü** çevrim kombinasyonlarının kazanç çarpımlarının toplamı)+ …,*

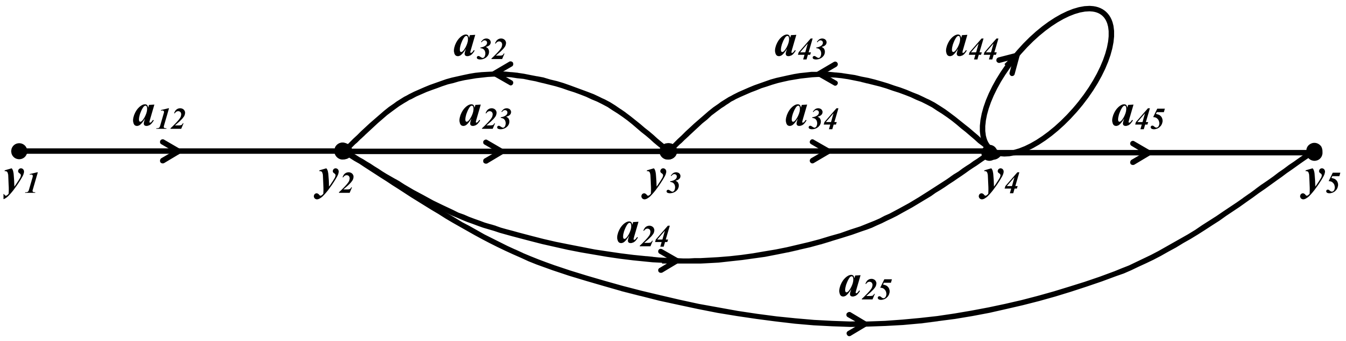
Δ_k = Δ'nın k'ıncı İAD ileri yolu ile temas etmeyen kısımdır.

Örnek 3-3. *Aşağıda işaret akış diyagramı verilen kapalı çevrim kontrol sisteminin transfer fonksiyonunu kazanç formülünü kullanarak bulunuz.*



1. *R(s) ile Y(s) arasında yalnız bir tek yol vardır ve kazancı:*
   $M_1 = G(s)$
2. *Yalnız bir tek çevrim vardır ve çevrim kazancı:*
   $L_{11} = -G(s)H(s)$
3. *Tek çevrim olduğundan, temas etmeyen başka çevrim yoktur. Ayrıca tek yol tek çevrimle temas halinde olduğundan* $\Delta_1 = 1$ *olur ve*
   $\Delta = 1 - L_{11} = 1 + G(s)H(s)$
4. *Transfer fonksiyonu* $M(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{M_1\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ *olarak bulunur.*

Örnek 3-4. *Aşağıda işaret akış diyagramı verilen kontrol sisteminin* y_1 *ve* y_5 *arasındaki transfer fonksiyonunu kazanç formülünü kullanarak bulunuz.*



<u>3 ileri yol kazancı görülmekte:</u>
Birinci ileri yol: $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5$ $M_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$
İkinci ileri yol: $y_1 - y_2 - y_4 - y_5$ $M_2 = a_{12}a_{24}a_{45}$
Üçüncü ileri yol: $y_1 - y_2 - y_5$ $M_3 = a_{12}a_{25}$
<u>4 çevrim görülmekte:</u>
$L_{11} = a_{23}a_{32}$, $L_{21} = a_{34}a_{43}$, $L_{31} = a_{24}a_{32}a_{43}$, $L_{41} = a_{44}$
<u>Temas etmeyen</u> yalnız 2 çevrim vardır; $y_2 - y_3 - y_2$ *ve* $y_4 - y_4$
Bunların çarpımı: $L_{21} = a_{23}a_{32}a_{44}$

Tüm çevrimler M_1 *ve* M_2 *ileri yollarına temas etmektedir.*
$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44}$

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{21} + L_{31} + L_{41}) + L_{21}$$
$$= 1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{44}) + a_{23}a_{32}a_{44}$$

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}) + (a_{12}a_{24}a_{45}) + (a_{12}a_{25})(1 - a_{34}a_{43} - a_{44})}{1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{44}) + a_{23}a_{32}a_{44}}$$

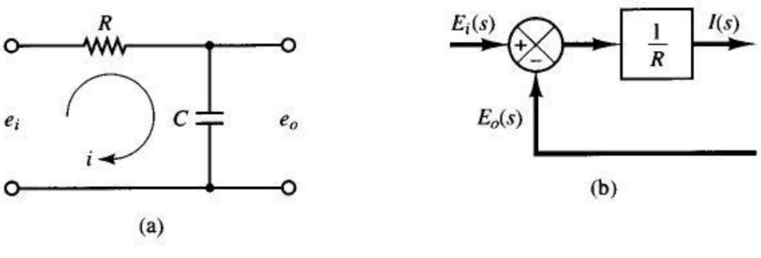
Eğer çıkış olarak y2 seçilirse:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a_{12}(1 - a_{34}a_{43} - a_{44})}{\Delta}$$

Örnek 3-5. *Aşağıda verilen elektrik devresi verilen kontrol sisteminin blok ve işaret akış diyagramını bulunuz.*

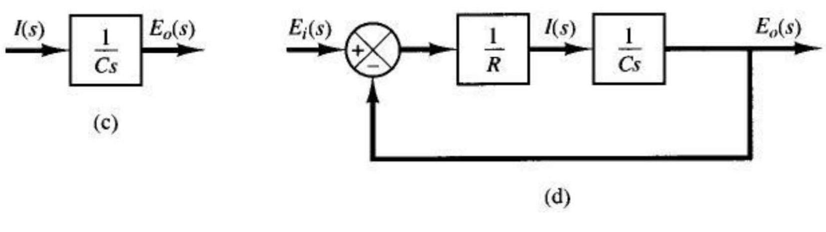
$$i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

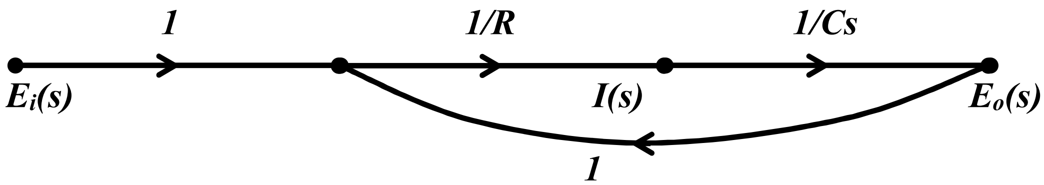
$$e_o = \frac{\int i\,dt}{C}$$



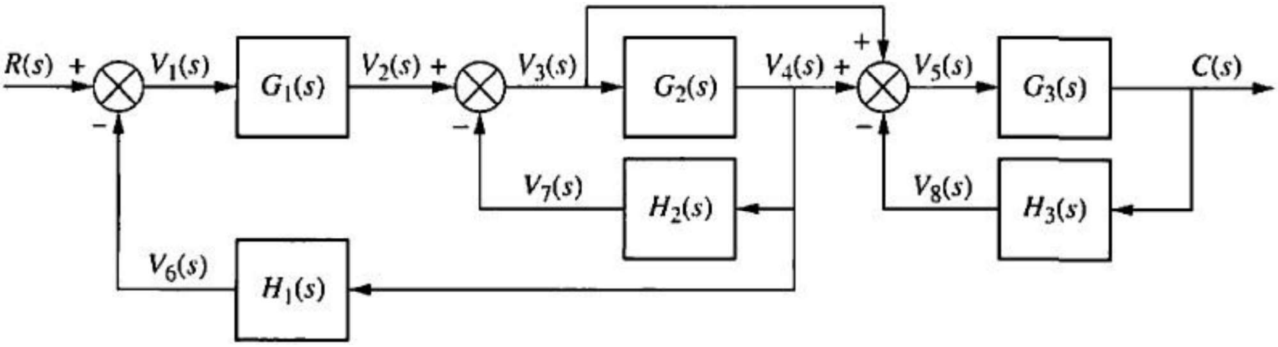
$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

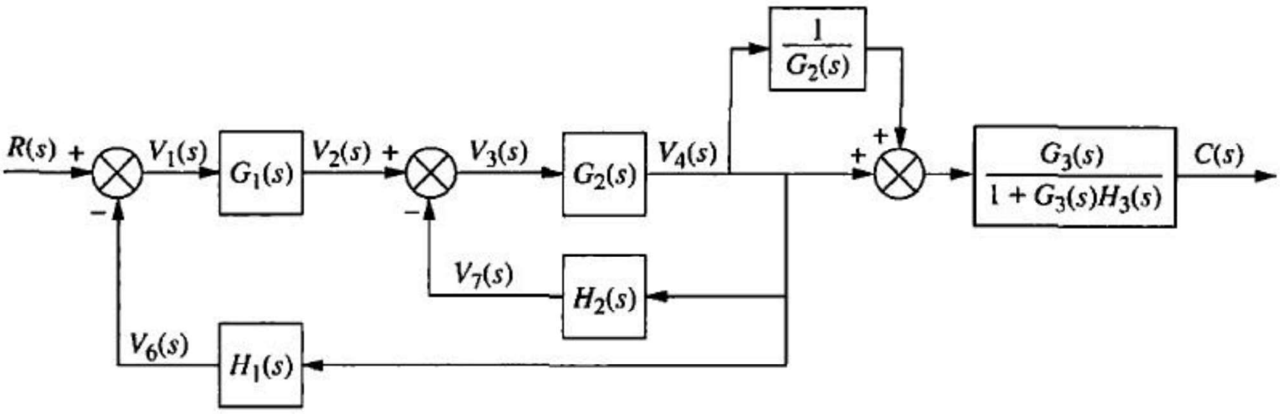
$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$



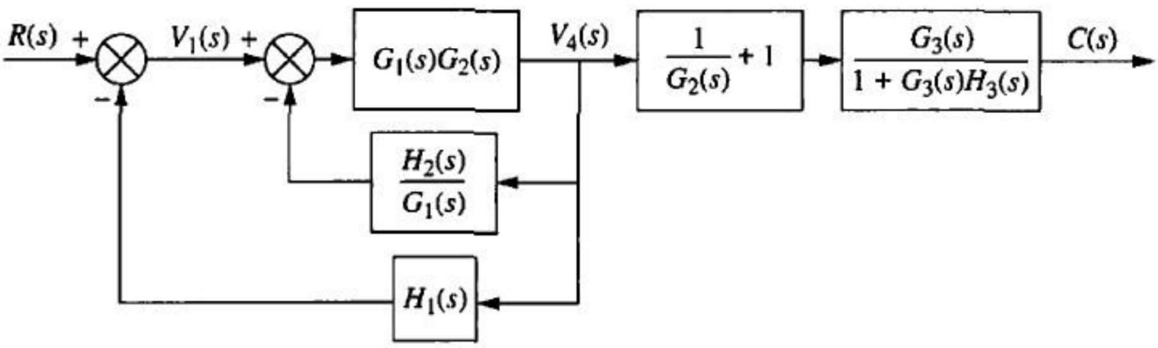


Örnek 3-5. *Aşağıda verilen kontrol sisteminin blok diyagramını tek blok kalana kadar indirgeyerek transfer fonksiyonunu bulunuz.*

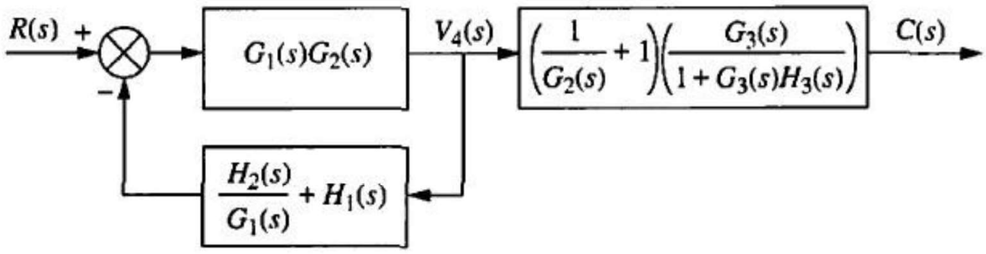




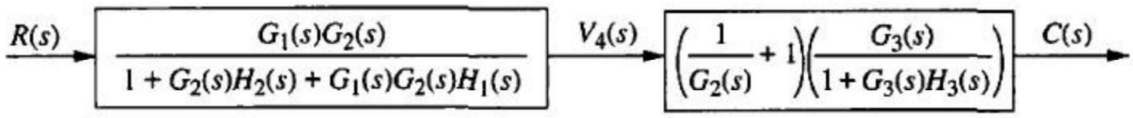
(a)



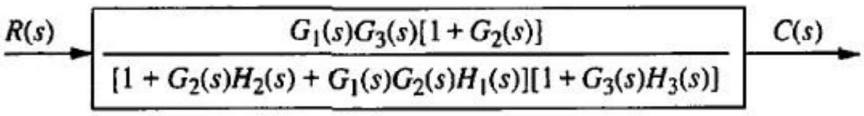
(b)



(c)

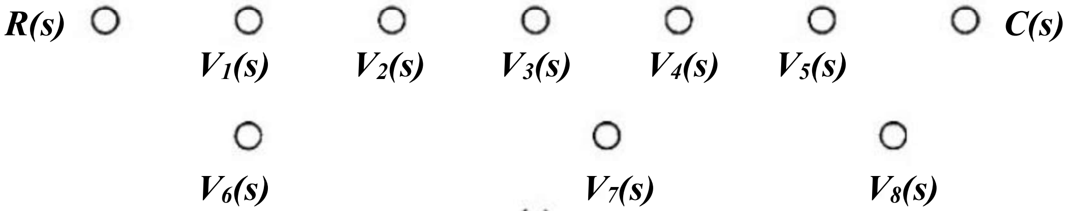


(d)

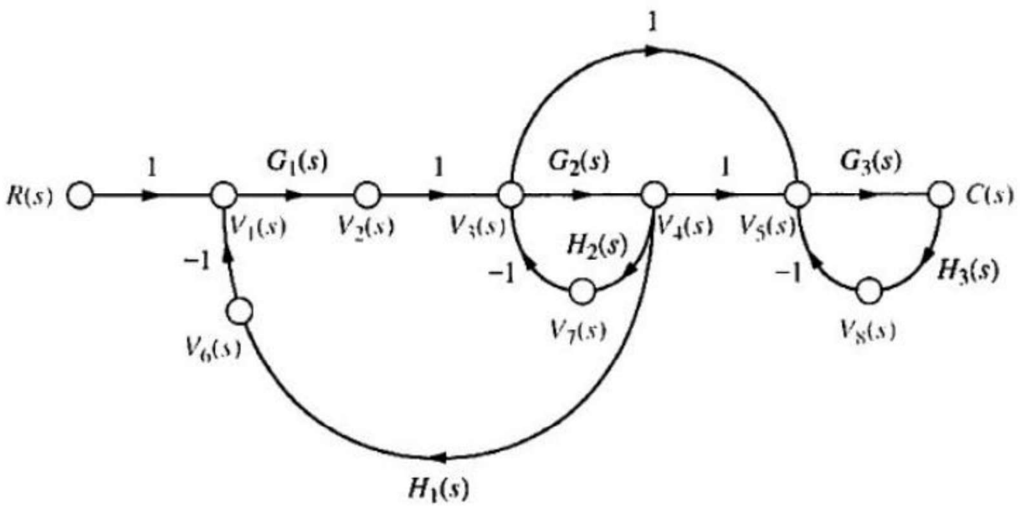


(e)

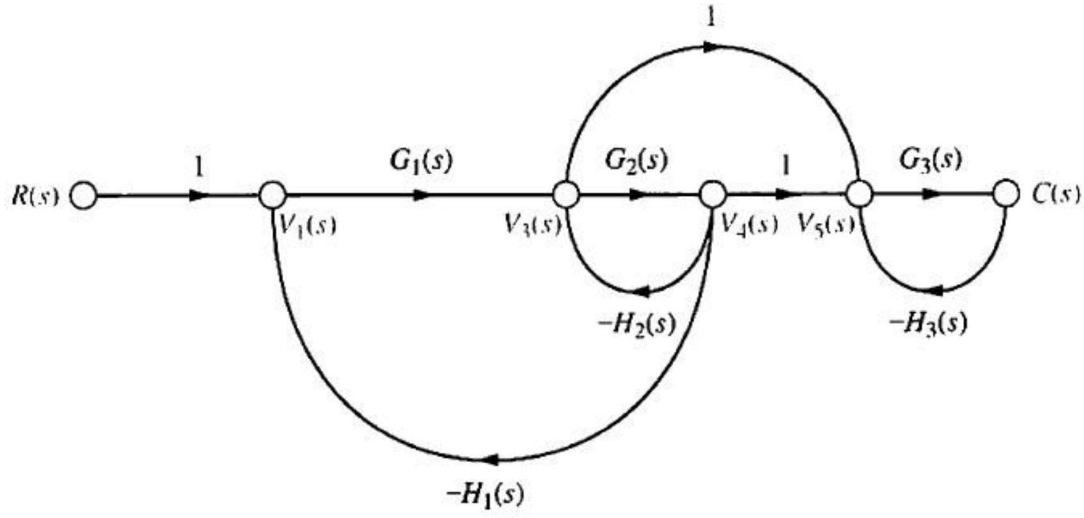
Örnek 3-6. *Aşağıda verilen kontrol sistemi blok diyagramının işaret akış diyagramını bulunuz.*



(a)

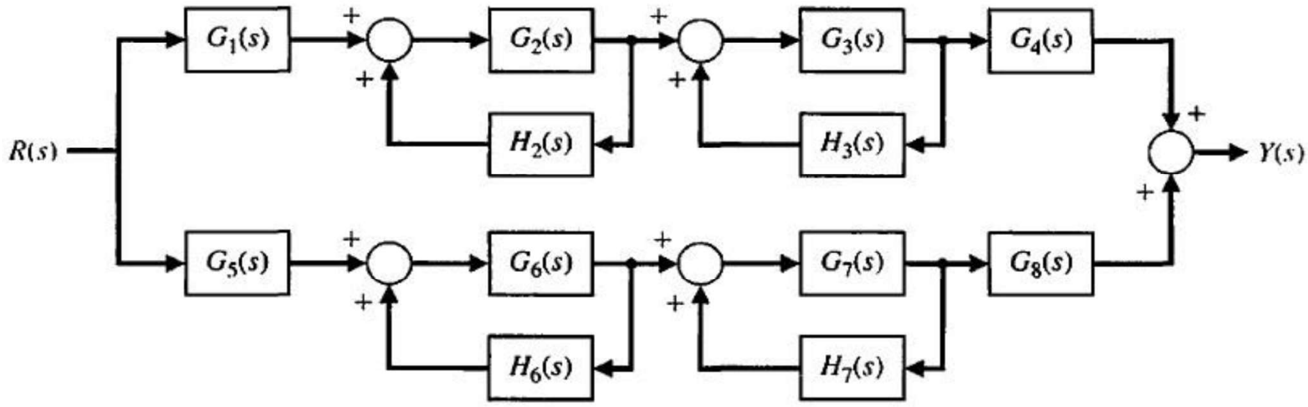


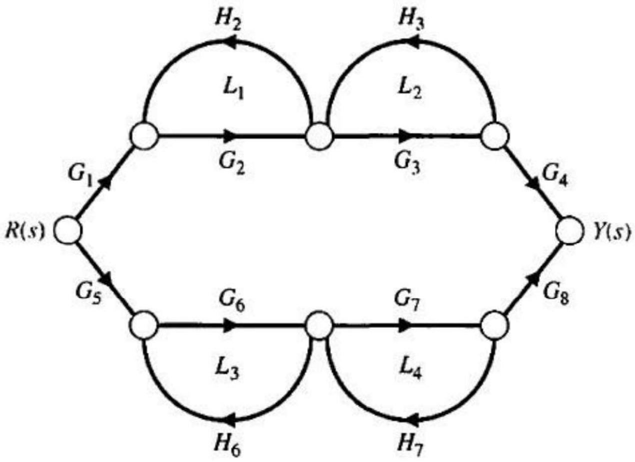
(b)



(c)

Örnek 3-7. *Aşağıda verilen kontrol sisteminin işaret akış diyagramını çiziniz. Kazanç formülünü kullanarak transfer fonksiyonunu bulunuz.*





$P_1 = G_1G_2G_3G_4$ *1.Yol ve* $P_2 = G_5G_6G_7G_8$ *2.Yol*

4 tane çevrim vardır:

$$L_1 = G_2H_2, \quad L_2 = H_3G_3, \quad L_3 = G_6H_6, \quad \text{and} \quad L_4 = G_7H_7.$$

L_1 ve L_2 çevrimleri L_3 ve L_4 çevrimleri ile temas etmez! Determinant:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4).$$

L_1 ve L_2 çevrimleri 1.yol ile temas etmez! Determinant 1:

$$L_1 = L_2 = 0 \quad \text{and} \quad \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4).$$

L_3 ve L_4 çevrimleri 2.yol ile temas etmez! Determinant 2:

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2).$$

Sistemin Transfer fonksiyonu kazanç formülü kullanılarak elde edilir.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4(1 - L_3 - L_4) + G_5G_6G_7G_8(1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4}.$$

$$Y_1(s) = G_1(s)\left[\frac{G_2(s)}{1 - G_2(s)H_2(s)}\right]\left[\frac{G_3(s)}{1 - G_3(s)H_3(s)}\right]G_4(s)R(s)$$

$$= \left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1 - G_2(s)H_2(s))(1 - G_3(s)H_3(s))}\right]R(s).$$

Aşağıdaki ileri yol kısmı da yukarıdaki gibi elde edilir.

$$Y_2(s) = G_5(s)\left[\frac{G_6(s)}{1 - G_6(s)H_6(s)}\right]\left[\frac{G_7(s)}{1 - G_7(s)H_7(s)}\right]G_8(s)R(s)$$

$$= \left[\frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1 - G_6(s)H_6(s))(1 - G_7(s)H_7(s))}\right]R(s).$$

İki kısım toplanarak Sistemin Transfer fonksiyonu elde edilir.

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1 - G_2(s)H_2(s))(1 - G_3(s)H_3(s))} + \frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1 - G_6(s)H_6(s))(1 - G_7(s)H_7(s))}\right]R(s). \blacksquare$$

Kaynaklar

1. Otomatik Kontrol Sistemleri, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999.
2. Automatic Control Systems, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley,2010.
3. Modern Control Systems, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Prentice Hall, 2011.
4. Control System Engineering, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.
5. Modern Control Engineering, K.OGATA, Prentice-Hall, 1997.
6. Feedback and Control Systems, Joseph J.Distefano, Allen R.Stubberrud, Ivan J.Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.
7. Ders Notları için İnternet Adresi: http://www.tuncayuzun.com/ , http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/