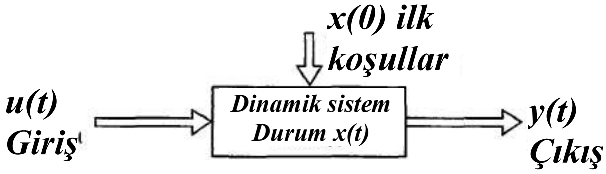
EHM3132 Gr.1

Otomatik Kontrol

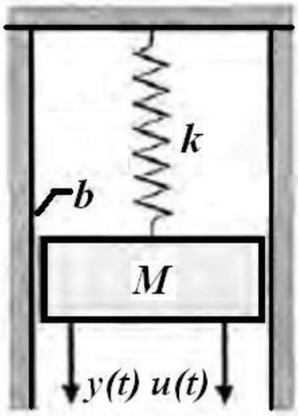
Bölüm 4
Durum Değişkenleri Analizi
Zaman Tanım Bölgesi Analizi

Durum Değişkenleri Analizi

Devre analizi dersinde durum değişkenlerinin nasıl seçildiği ve durum denklemlerinin nasıl yazıldığı gösterilmişti. Burada ise benzer şekilde, Doğrusal Kontrol sistemlerinde Zaman Tanım Bölgesi Analizi ve tasarımında Durum Değişkenleri yöntemi gösterilecektir.
Durum Değişkenleri yaklaşımının temel özelliği doğrusal ve doğrusal olmayan zamanla değişmeyen ve değişen tek ve çok değişkenli sistemlere uygulanabilir olmasıdır. Transfer fonksiyonları ise yalnız doğrusal zamanla değişmeyen sistemlere uygulanabilir.
Durum değişkenleri, giriş işaretleri ve dinamik denklemleri verilen bir sistemin gelecek çıkış yanıtını bulmak için kullanılır.



Örnek 4.1: *Aşağıda verilen kütle, yay ve sürtünme sisteminde kütlenin konumu ve hızı için $(x1, x2)$ durum değişkeni ise denklemlerini yazınız.*



$x1$ ve $x2$ durum değişkenleri:

$$x_1(t) = y(t) \qquad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Diferansiyel denklemler:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\cdot\frac{dy}{dt} + k\cdot y = u(t)$$

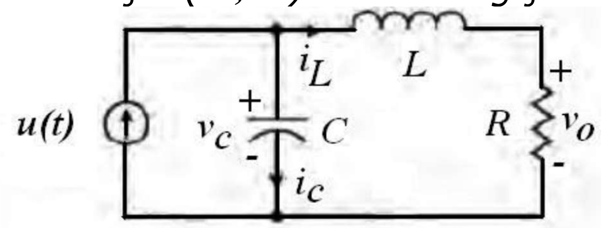
Durum değişkenleri denklemi elde edilir.

$$M\frac{dx_2}{dt} + b\cdot x_2 + k\cdot x_1 = u(t)$$

Bu 1.derece diferansiyel denklemden sistemin durum denklemleri elde edilir.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{M}\cdot x_2 - \frac{k}{M}\cdot x_1 + \frac{1}{M}u(t)$$

Örnek 4.2: *Aşağıda verilen RLC devresinde kapasite gerilimi ve endüktans akımı için $(x1, x2)$ durum değişkeni ise denklemlerini yazınız.*



$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = +u(t) - i_L \quad , \quad L\frac{di_L}{dt} = -R\cdot i_L + v_C \quad , \quad v_O = R\cdot i_L(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}u(t) - \frac{1}{C}i_L \quad , \quad \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}\cdot i_L + \frac{1}{L}v_C \quad , \quad v_O(t) = R\cdot i_L(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C}u(t) - \frac{1}{C}x_2 \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{R}{L}\cdot x_2 + \frac{1}{L}x_1 \quad , \quad y_1(t) = R\cdot x_2$$

Durum Denklemlerinin Vektör-Matris Gösterimi:

Diferansiyel denklem vektör-matris şeklinde genelleştirilirse:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Durum Vektörü: $x(t)$

Giriş Vektörü: $u(t)$

Çıkış Vektörü: $y(t)$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Örnek 4.3: *Örnek 4.2'de elde edilen diferansiyel denklemden sistemin durum denklemleri vektör-matris şeklinde yazınız.*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Durum Geçiş Matrisi:

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin durum denklemleri elde edildikten sonra, belirli bir $x(t_0)$ *başlangıç durumu,* $u(t)$ *giriş vektörü ile* $t \geq t_0$ *için geçerli bir çözüm bulunur. Durum denkleminin ilk terimi homojen kısmıdır ve son terim ise zorlayıcı fonksiyonu belirler.*

$$\dot{x} = ax + bu,$$

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s);$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s).$$

Diferansiyel ifadesi: $$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau.$$

Matris ifadesi:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} + \cdots,}$$

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau.$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \mathbf{\Phi}(s)$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau.}$$

$\mathbf{u} = 0$ ***için*** *Homojen durum denkleminin çözümü:*

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}.$$

Bu aynı zamanda $\phi(t)$ durum geçiş matrisidir.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \frac{d\phi(t)}{dt} = \mathbf{A}\phi(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \phi(t)\mathbf{x}(0)$$

Durum geçiş matrisi homojen durum denklemini sağladığından sistemin ilk koşullar tarafından yönlendirilen serbest yanıtını belirler. durum geçiş matrisi yalnız $\mathbf{A}$ *matrisine bağlı olduğundan,* $\mathbf{A}$ *matrisi durum geçiş matrisi olarak da adlandırılır.* $\phi(t)$ *durum geçiş matrisi, girişler sıfır alındığında, t=0 başlangıç zamanından herhangi bir t zamanındaki durumlara geçişi belirler.*

Durum geçiş matrisinin özellikleri:

1. $\phi(0) = I$ *(birim matris)*
2. $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ *(zamana göre iki yönlüdür)*
3. $\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0) = \phi(t_2-t_0)$ *, her* t_0, t_1, t_2 ***için*** *(ardışık geçişlere ayırma)*
4. $[\phi(t)]^k = \phi(kt)$ *,* k *= pozitif tamsayılar için*

Karakteristik Denklem:

Diferansiyel denklemin homojen kısmı sıfıra eşitlenerek,
Transfer fonksiyonunun payda polinomu sıfıra eşitlenerek,
Durum denkleminde $\mathbf{A}$ *matrisinden* $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ *determinant sıfıra eşitlenerek,*
sistemin karakteristik denklemi elde edilir.

Özdeğerler:

Karakteristik denklemin kökleri genellikle $\mathbf{A}$ *matrisinin özdeğerleridir.*

1. *Eğer* $\mathbf{A}$ *'nın katsayıları gerçek ise özdeğerleri de gerçektir yada karmaşık eşlenik çiftlerden oluşur.*
2. *Eğer* $\mathbf{A}$ *'nın özdeğerleri* λ_1, λ_2, … λ_n *ise* $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
3. *Eğer* λ_i , $i=1,2,\ldots n$ *için* $\mathbf{A}$ *nın özdeğeri ise* $\mathbf{A}'$ *nın özdeğeridir.*
4. *Eğer* $i=1,2,\ldots n$ *için* λ_i *ler tekil olmayan* $\mathbf{A}$ *nın özdeğerleri ise* $i=1,2,\ldots n$ *için* $1/\lambda_i$ *ler* $\mathbf{A}^{-1}$ *in özdeğerleridir.*

Bir kapalı döngü sistemin oluşturulmasından önce sistem modelinden geçici rejim cevabının analizi ile sistem tanımlanması önemlidir.

Zaman Tanım Bölgesi Analizi

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sisteminin tüm ilk koşullarının sıfır olması durumunda, sistemin çıkışı ile (C(s), yanıt fonksiyonu), girişinin (R(s), sürücü fonksiyon) Laplace dönüşümleri oranına transfer fonksiyonu (G(s)) denir.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)}} \longrightarrow C(s)$$

Kutup, Sıfır ve Sistem Yanıtı

Kutuplar

Transfer fonksiyonunun paydasının kökleridir.

$$a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Kompleks kutuplar sistemin enerji depolama karakteristikleri ile ilgili doğal frekanslarını gösterir. Algılayıcı (sensor) ve güncelleyicilerin (actuator) ***s*** *düzlemindeki yerlerinden bağımsızdır. Sistemin enerji depolama elemanları arasında enerjinin serbest dolaştığı doğal frekansları gösterir.*

Sıfırlar

Transfer fonksiyonunun payının kökleridir.

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0 = 0$$

Kompleks sıfırlar sistemin enerji yutma karakteristikleri ile ilgili frekanslarını gösterir. Algılayıcı (sensor) ve güncelleyicilerin (actuator) enerji depolama elemanları arasında enerjinin yutulduğu rezonans frekanslarını gösterir.

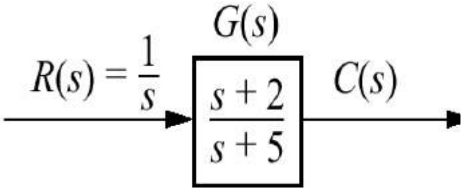
Örnek 4.1.

$$G(s) = \frac{K(s+1)(s+15)}{s(s+3)(s+5)(s+8)^2}$$

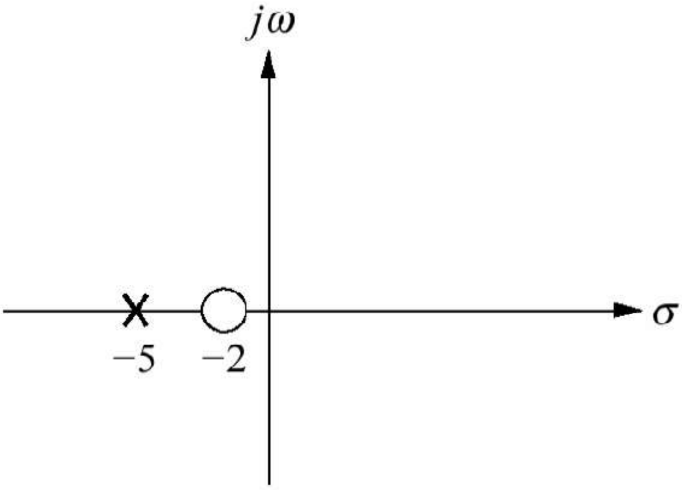
Sıfırlar: -1, -15
Kutuplar: 0, -3, -5, -8 (2 tane)

Sistem Yanıtı

Örnek 4.2. *Aşağıda verilen kontrol sisteminin sıfır ve kutuplarını bulunuz. ve s düzleminde gösteriniz. Sistemin zaman tanım bölgesi analizini yapınız.*



Sıfır : -2
Kutup : -5



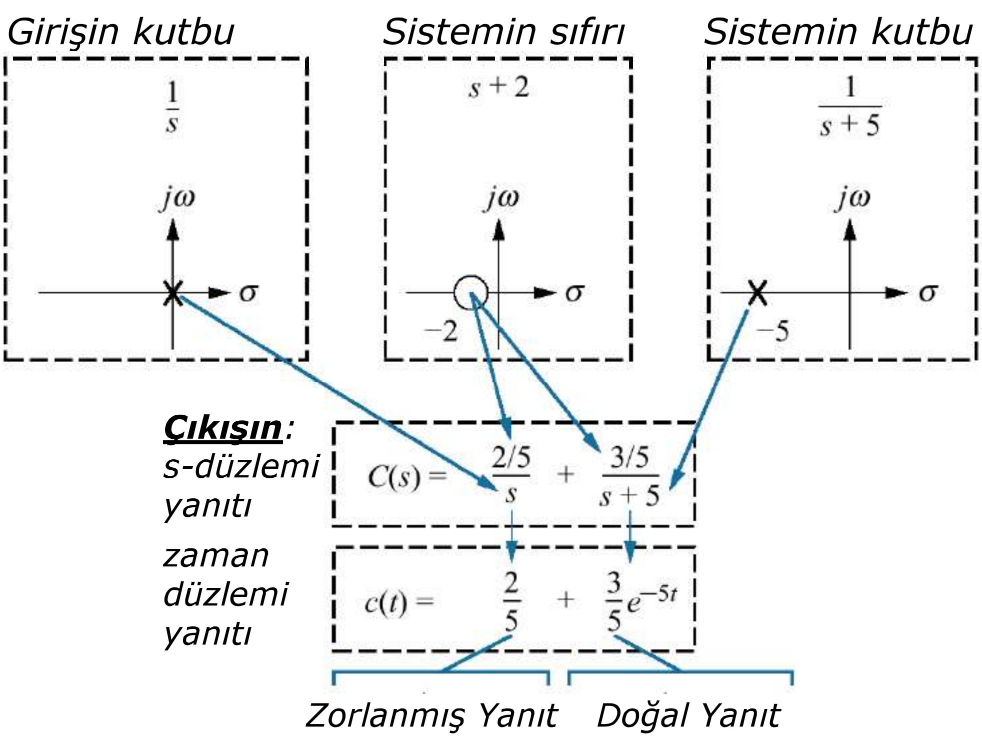
Sistemin zaman tanım bölgesi analizi, birim basamak yanıtı:

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} \qquad C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+5)}$$

$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s \to 0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s \to -5} = \frac{3}{5}$$

$$C(s) = \frac{\frac{2}{5}}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s+5} \Rightarrow \quad c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$



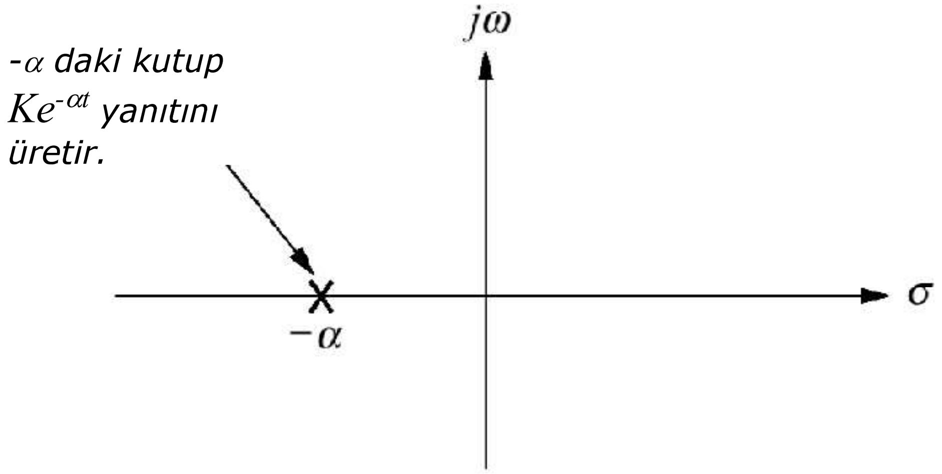
1. Giriş fonksiyonunun kutbu zorlanmış çözümü üretir. (Orijindeki kutup çıkışta birim basamak fonksiyonu oluşturdu)

2. Transfer fonksiyonunun kutbu doğal yanıtı oluşturur. (-5 deki kutup e^{-5t}yi üretti)

3. Reel eksendeki kutup $e^{-\alpha t}$ şeklinde üstel bir yanıt üretir, bu kutup ne kadar solda ise üstel geçici yanıt 0'a o kadar hızlı düşer

4. Sıfır hem kararlı halde hem de geçici rejimde büyüklüğün oluşmasına yardımcı olur.

Reel eksendeki kutup $e^{-\alpha t}$ şeklinde üstel bir yanıt üretir.



Örnek 4.2. *Aşağıda çıkış ifadesi verilen kontrol sisteminin zaman tanım bölgesi analizini yapınız.*

$$C(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{(s+4)} + \frac{K_4}{(s+5)}$$

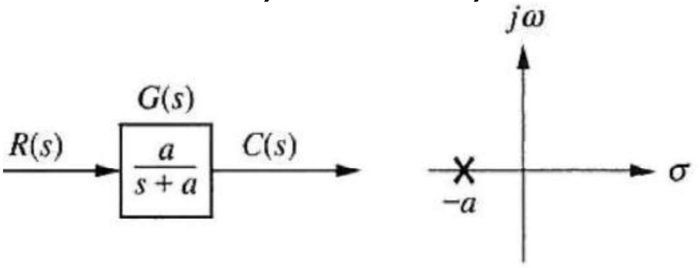
Çözüm:

$$c(t) = \underset{\text{Zorlanmış Yanıt}}{K_1} + \underbrace{K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}}_{\text{Doğal Yanıt}}$$

Birinci Derece Sistemler

Birinci derece sistemin performans özelliklerini belirmek için sıfırları olmadan transfer fonksiyonu belirlenebilir.

Örnek 4.4. *Aşağıda verilen birinci derece kontrol sisteminin sıfırları olmadan transfer fonksiyonu belirleyiniz.*



Çözüm:

$R(s) = 1/s$ *Birim basamak giriş için*

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

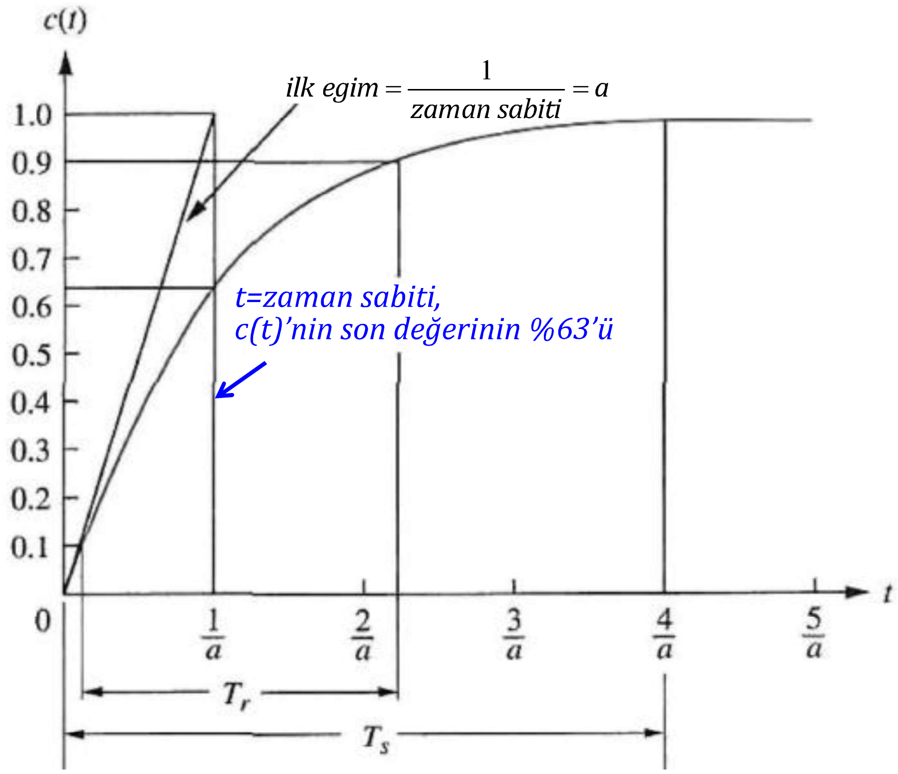
zaman düzlemi yanıtı: $c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}$

***a**'ya göre sistemi incelersek:*

$$t = \frac{1}{a} \Rightarrow e^{-at}\Big|_{t=\frac{1}{a}} = e^{-1} = 0.37$$

$$x(t) = 1 - e^{-at}\Big|_{t=\frac{1}{a}} = 1 - 0.37 = 0.63$$

Birinci derece sistemin birim basamak yanıtı



Zaman Sabiti:

- ***1/a**'ya zaman sabiti denir.*
- *Denklemler ve şekle göre $\boldsymbol{e^{-at}}$ nin başlangıç değerinin %37 sine düşmesine kadar olan zaman veya birim basamak yanıtının %63 üne ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanabilir. Zaman sabitinin birimi **1/saniye** dir. **a** parametresine de üstel frekans denir.*
- ***t=0**'da $\boldsymbol{e^{-at}}$ nin türevi **a** olduğu için **t=0** da başlangıç eğimi **a** dır.*
- *Böylece 1. derece sistemin geçici yanıtı süresi zaman sabiti olarak değerlendirilebilir.*

Yükselme Zamanı, T_r:

Yükselme zamanı, yanıtın %10'un dan %90'ına ulaşıncaya kadar geçen süredir.

$c(t) = 1 - e^{-at}$ *denkleminde c(t)=0,9 ve c(t)=0,1 zamanları arasındaki fark:*

$0.9 = 1 - e^{-at} \Rightarrow -t_2 = \dfrac{\ln(0.1)}{a}$ *ve* $0.1 = 1 - e^{-at} \Rightarrow -t_1 = \dfrac{\ln(0.9)}{a}$ *eşitliklerinden,*

$T_r = t_2 - t_1 = \dfrac{2{,}2}{a}$ *olarak bulunur.*

Yerleşme Zamanı, T_s:

Yükselme zamanı, yanıtın %98'ine ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanır.

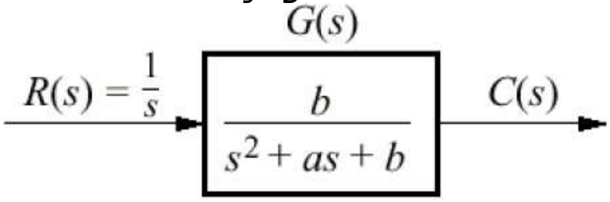
$c(t) = 1 - e^{-at}$ *denkleminde c(t)=0,98 alınırsa:*

$0.98 = 1 - e^{-at} \Rightarrow -t = \dfrac{\ln(0.02)}{a}$ *eşitliğinden,* $T_s = \dfrac{4}{a}$ *olarak bulunur.*

İkinci Derece Sistemler

Birinci derece sistemlerde parametre değişimi yalnız sistemin yanıt hızını değiştirir. İkinci derece sistemlerde ise yanıtın şeklini de değiştirebilir.

Örnek 4.5. *Aşağıda verilen ikinci derece kontrol sisteminin analizini yapınız.*



*Bu sistemin sıfırı yok ve iki tane kutbu vardır. Paydadaki **b** sayısı yalnız girişi çarpan bir faktördür. **a** ve **b** nin değişik değerleri için bu sistemi inceleyeceğiz.*

Aşırı sönümlü durum:

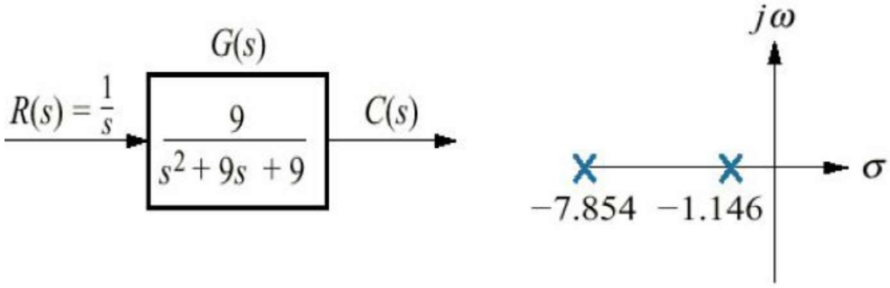
$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)}$$

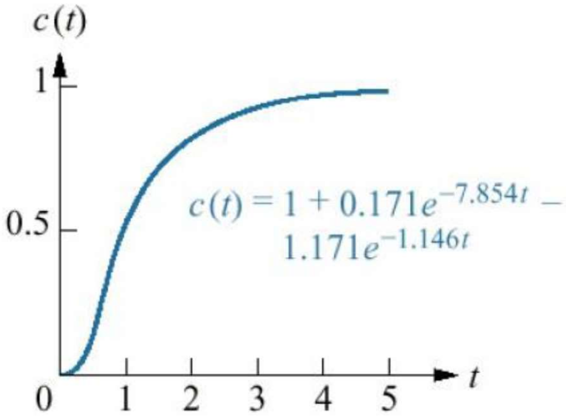
$$C(s) = \frac{9}{s(s+7.854)(s+1.146)}$$

Burada, giriş fonksiyonu, sabit zorlanmış çözümü, reel eksen üzerindeki iki kutup ise doğal çözümü oluşturur.

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-7.854\,t} + K_3 e^{-1.146\,t}$$

İkinci derece aşırı sönümlü sistemin birim basamak yanıtı





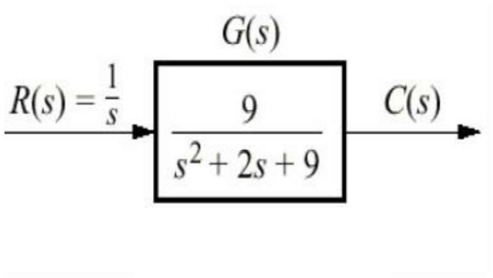
Sönümlü durum:

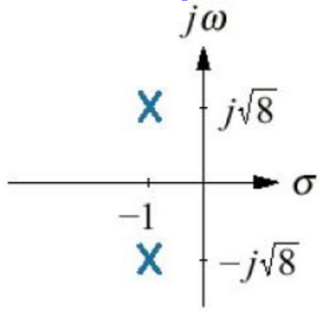
$$C(s)=\frac{9}{s(s^2+2s+9)}$$

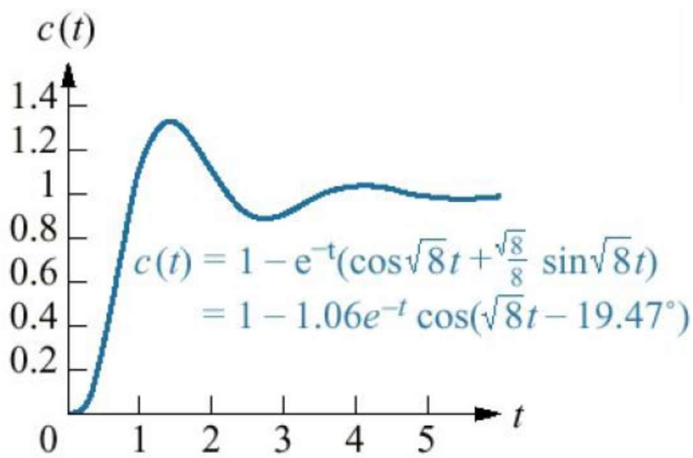
Burada, kompleks eşlenik kökler vardır. Eşlenik kutuplar: $\boldsymbol{s}_{1,2}=-1\pm \boldsymbol{j}2.82$

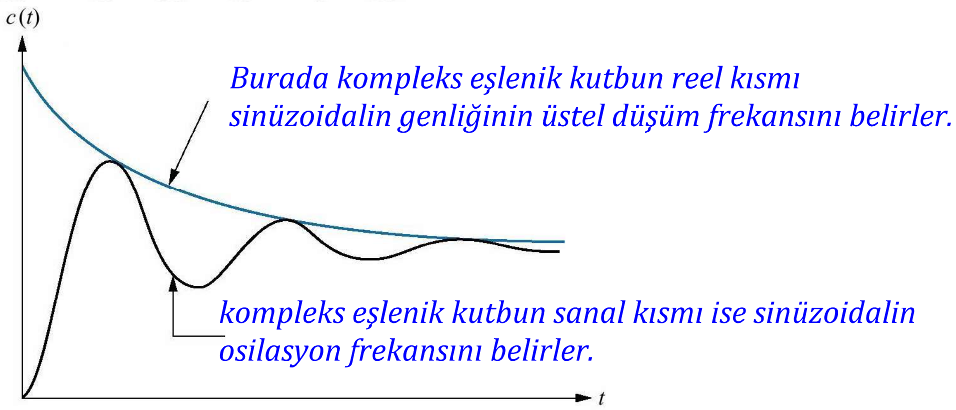
$$c(t)=1-e^{-t}(\cos\sqrt{8}t+\tfrac{\sqrt{8}}{8}\sin\sqrt{8}t)=1-1.06e^{-t}\cos(\sqrt{8}t-19.47^{\circ})$$

İkinci derece sönümlü sistemin birim basamak yanıtı



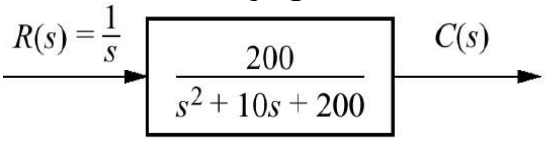






Bu tür yanıtlara sönümlü yanıtlar denir ve kararlı duruma sönümlü osilasyonla ulaşır. Sinüzoidalin frekansına sönümlü osilasyon frekansı, ω_d *denir.*

Örnek 4.6. *Aşağıda verilen ikinci derece kontrol sisteminin analizini yapınız.*



Çözüm:

Burada, kompleks eşlenik kökler vardır. Eşlenik kutuplar: $s_{1,2}=-5\pm j13.23$

$$c(t) = K_1 + e^{-5t}(K_2 Cos\,(13.23\,t) + K_3 Sin\,(13.23\,t))$$

$$c(t) = K_1 + K_4 e^{-5t}(Cos\,(13.23\,t) - \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{K_3}{K_2}\right) \qquad K_4 = \sqrt{K_2^{\,2} + K_3^{\,2}}$$

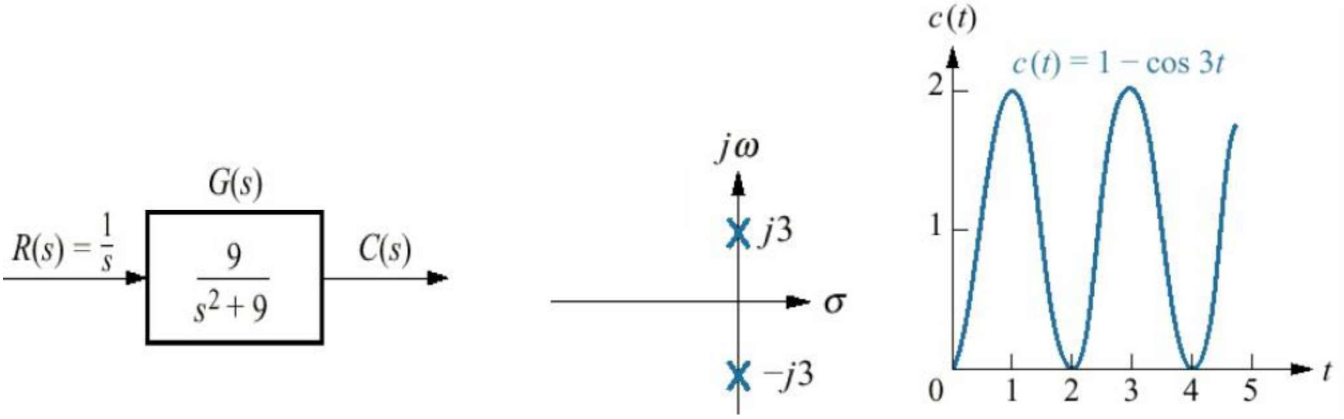
Sönümsüz (osilasyonlu, rezonans) durum:

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+9)}$$

Burada, sanal eksende kompleks eşlenik kökler vardır. Eşlenik kutuplar: $s_{1,2}=\pm j3$

$$c(t) = 1 - \cos 3t$$

İkinci derece osilasyonlu sistemin birim basamak yanıtı



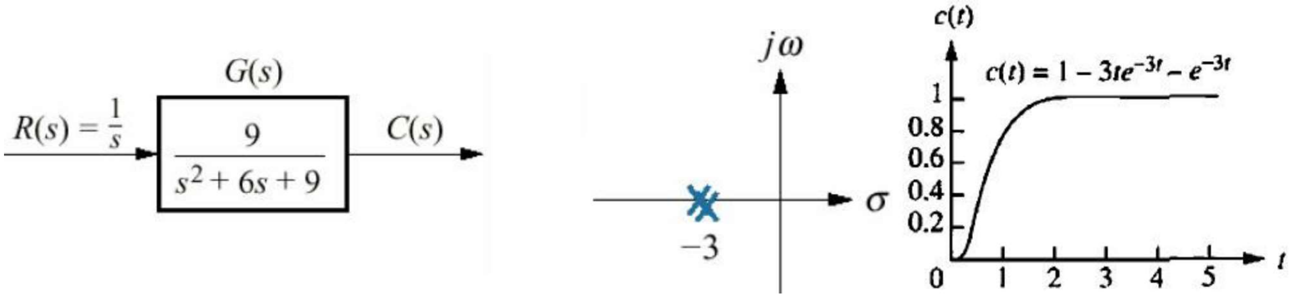
Kritik sönümlü durum:

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+6s+9)} = \frac{9}{s(s+3)^2}$$

Burada, reel eksende katlı kökler vardır. Kutuplar : $s_{1,2} = -3$

$$c(t) = 1 - 3te^{-3t} - e^{-3t}$$

İkinci derece kritik sönümlü sistemin birim basamak yanıtı

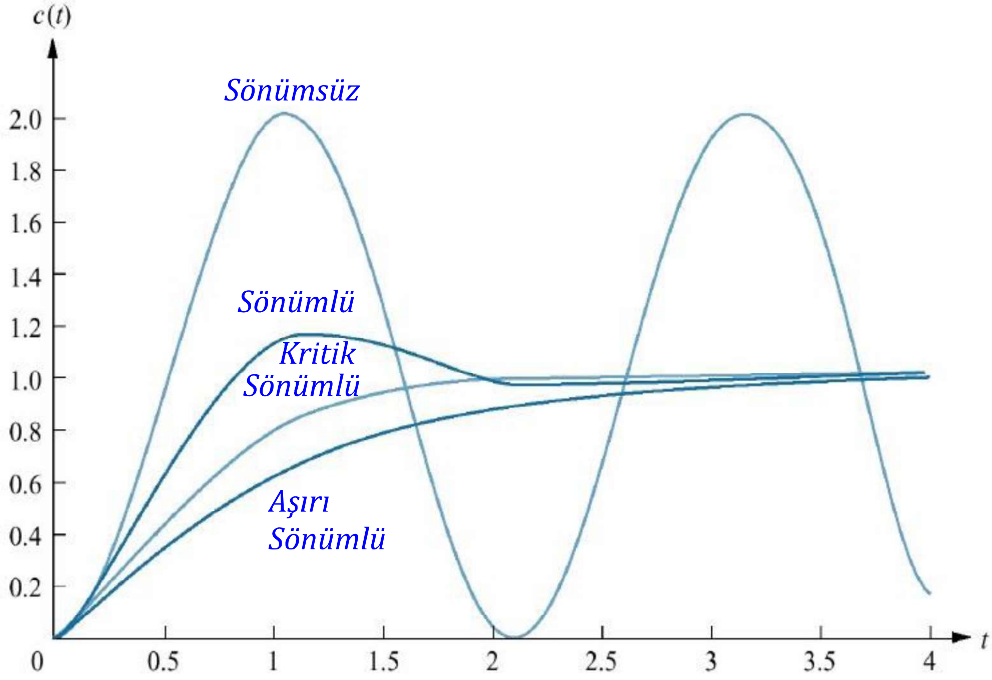


Burada, giriş fonksiyonu, sabit zorlanmış yanıtını, reel eksen üzerindeki -3 teki iki katlı kutup ise üstel ve üstel ile zamanın çarpımı doğal yanıtını oluşturur.

Özet

1. ***Aşırı sönümlü durum:***
   Kutuplar: $-\sigma_1, -\sigma_2$ *2 tane reel kutup*
   Doğal yanıt: $c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} - K_2 e^{-\sigma_2 t}$
2. ***Sönümlü durum:***
   Kutuplar: $-\sigma_d \pm j\omega_d$ *bir tane kompleks eşlenik kutup*
   Doğal yanıt: $c(t) = Ae^{-\sigma_d t}\cos(\omega_d t - \phi)$
3. ***Sönümsüz (osilasyonlu, rezonans) durum:***
   Kutuplar: $\pm j\omega_1$ *sanal eksende kompleks eşlenik kutup*
   Doğal yanıt: $c(t) = A\cos(\omega_1 t - \phi)$
4. ***Kritik sönümlü durum:***
   Kutuplar: $-\sigma_1$, *2 tane katlı reel kutup*
   Doğal yanıt: $c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} - K_2 t e^{-\sigma_2 t}$

İkinci derece sistemin sönüm durumu birim basamak yanıtları



İkinci derece sistemin genel özellikleri:

- *Doğal frekans, ω_n: Sistemin sönümsüz osilasyon frekansıdır.*
- *Sönüm oranı, ζ: Üstel azalma frekansının doğal frekansına oranıdır.*

$$\zeta = \frac{\text{üstel azalma frekansı}}{\text{dogal frekans}(rad/sn)} = \frac{1}{2\pi}\frac{\text{dogal periyot}(sn)}{\text{üstel zaman sabiti}}$$

$$G(s) = \frac{b}{(s^2 + as + b)}$$ *örneği için, sönümsüz sistemin kutupları sanal eksen üzerinde olursa sistemin doğal yanıtı sönümsüz sinüzoidal olur. Bunun için a=0 olmalıdır.*
Tanım gereği sistemin osilasyon frekansı sistemin doğal frekansıdır ve sistemin kutupları sanal eksende $\pm\sqrt{b}$ *olduğu için* $\omega_n=\sqrt{b}$ *ve* $b=\omega_n^2$ *olur.*
Sistem sönümlü olsaydı a≠0 ve kompleks eşlenik köklerin reel kısımları –a/2 olur. Bu değer üstel azalma frekansını belirtir.

$$\zeta = \frac{\frac{a}{2}}{\omega_n} \quad \Rightarrow \quad a = 2\zeta\omega_n$$

İkinci derece sistemin genel ifadesi:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Örnek 4.8. *Aşağıda verilen ikinci derece kontrol sisteminin analizini yapınız.*

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4.2s + 36}$$

Çözüm:

$$2\zeta\omega_n = 4.2 \qquad \text{ve} \qquad \omega_n^{\ 2} = 36$$

$$\omega_n = 6 \qquad \zeta = \frac{4.2}{2\times 6} = 0.35$$

Genel ifade:

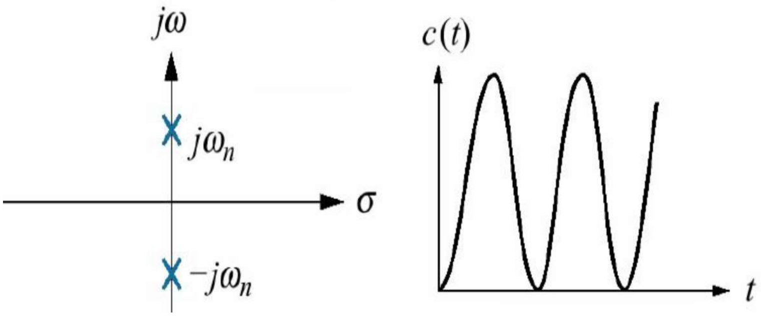
$$G(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

Kökler:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Sönümsüz durum:

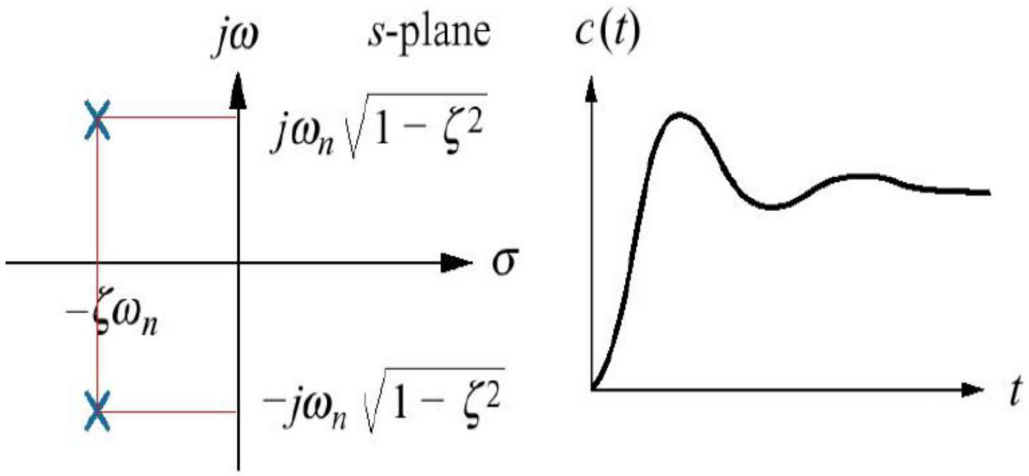
$$\zeta = 0$$



Sönümlü durum:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

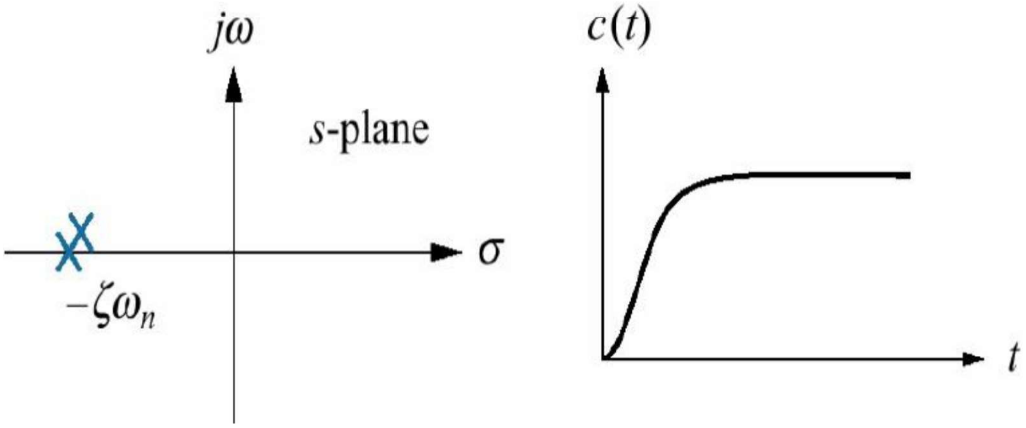
$$0 < \zeta < 1$$



Kritik sönümlü durum:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

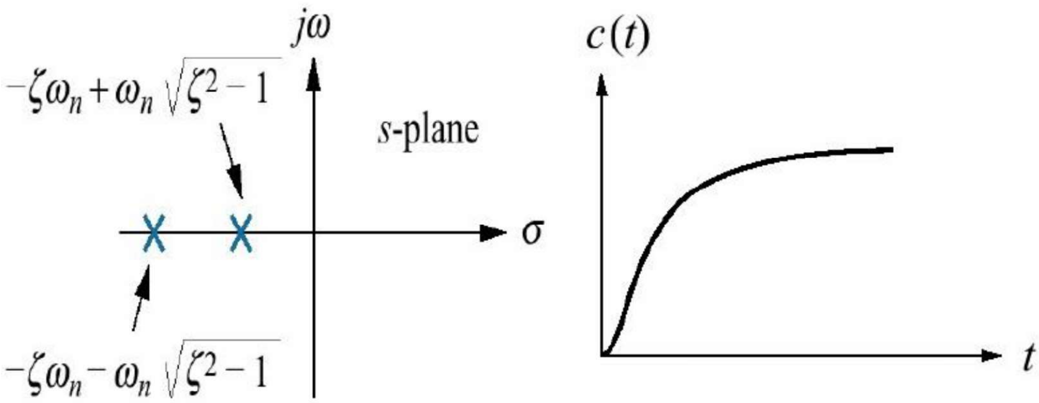
$$\zeta = 1$$



Aşırı sönümlü durum:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\zeta > 1$$



Örnek:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{12}{s^2+8s+12}} \longrightarrow C(s)$$

Sisteminin ne tür cevabı olacağını bulunuz.

$$a = 2\zeta\omega_n \quad \text{ve} \quad \omega_n = \sqrt{b} \Rightarrow \zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{8}{2\sqrt{12}}$$

$\zeta = 1.155$ $\qquad$ $\zeta > 1$ Olduğu için aşırı sönümlüdür

Örnek:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{16}{s^2+8s+16}} \longrightarrow C(s)$$

Sisteminin ne tür cevabı olacağını bulunuz.

$$\zeta = \frac{8}{2\sqrt{16}} \Rightarrow \quad \zeta = 1$$

$\zeta = 1$ Olduğu için kritik sönümlüdür

Sönümlü İkinci Derece Sistemlerin Genel Özellikleri:

Birçok fiziksel problem için sönümlü ikinci derece sistemler iyi bir modeldir.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta < 1$$

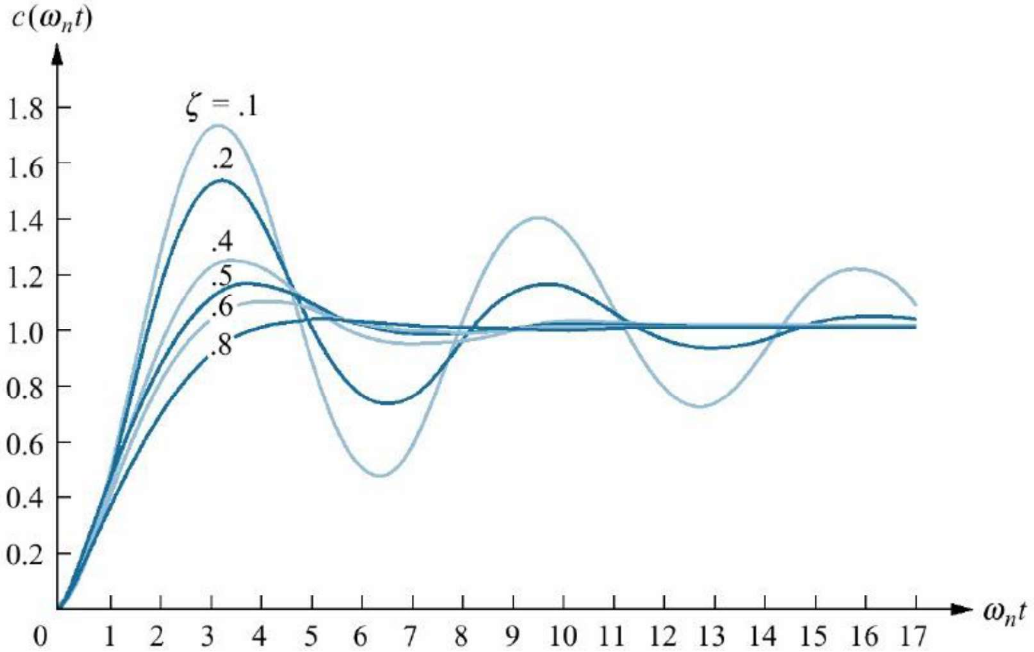
$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

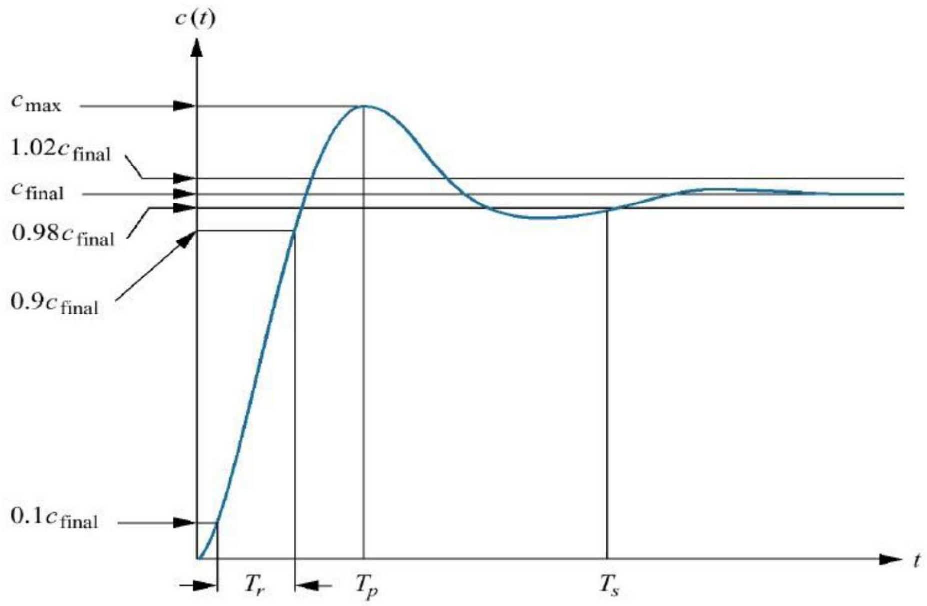
$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[Cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}Sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)\right]$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\left[Cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) - \phi\right]$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

İkinci derece sönümlü sistemin değişen sönüm oranları ile yanıtı





1. ***Tepe Süresi, T_p:*** *Sistem cevabının tepe veya maksimum noktaya ulaştığında geçen süre.*
2. ***Aşım, %OS:*** *Sistem yanıtının tepe veya maksimum noktası ile kararlı haldeki değeri arasındaki farkın kararlı haldeki değere oranıdır. % olarak ifade edilir.*
3. ***Yükselme Zamanı, T_r:*** *Sistem yanıtının %10'nun dan %90'nına ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanır.*
4. ***Yerleşme Zamanı, T_s:*** *Sistem yanıtının %98'ine ulaşıncaya kadar geçen süredir.*

Bu tip bilgiler tasarımcının cevabın hızının veya doğasının sistem performansını azaltıp azaltmadığına karar vermesi açısından önemlidir.

1. Tepe Süresi, Tp, nin İncelenmesi

T_p, c(t)'nin türevi alınıp t=0 dan sonra ilk sıfırı bularak hesaplanır.
Başlangıç şartları sıfır kabul edilip,

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sf(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}[\dot{c}(t)] = sC(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

$$= \frac{\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \quad \Rightarrow c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} Sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)$$

Türevi sıfıra eşitlersek: $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t = n\pi \quad ve \quad t = \dfrac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

n *nin her bir değeri yerel maksimum veya minimumu gösterir.* ***n=0, t=0*** *anına karşılık gelir ve eğim sıfırdır.*
n *nin değerinin 1 olması birinci tepe zamanına karşılık gelir. Böylece:*

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

2. Aşım, %OS, İncelenmesi

c_{max} , T_p anındaki c(t)'nin değeridir. Aşım c_{max} ve c_{final}, ile aşağıdaki şekilde hesaplanır.

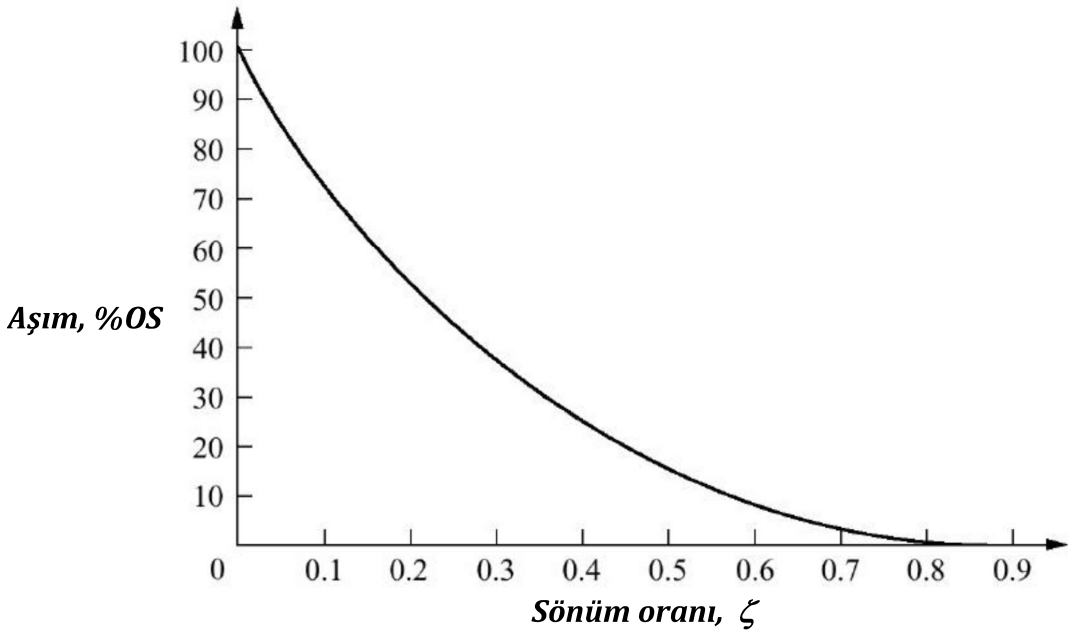
$$\%OS = \frac{c_{\max} - c_{final}}{c_{final}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[Cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) \right]$$

$$c_{\max} = c(T_p) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[Cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sin(\pi) \right] = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Birim basmak için c_{final}=1

$$\%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100 \qquad ve \qquad \zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$



3. Yerleşme Süresi, T_s, nin İncelenmesi

Yerleşme süresini bulabilmek için c(t) nin kararlı hal c_{final} değerinin %98 sine ulaştığı zamanı hesaplamamız gerekir. Tanımdan hatırlanacağı üzere yerleşme süresi azalan sinüzoidalin genliğinin 0.02'ye ulaşma süresidir. Buradan:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\left[Cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) - \phi\right] \quad =1$$

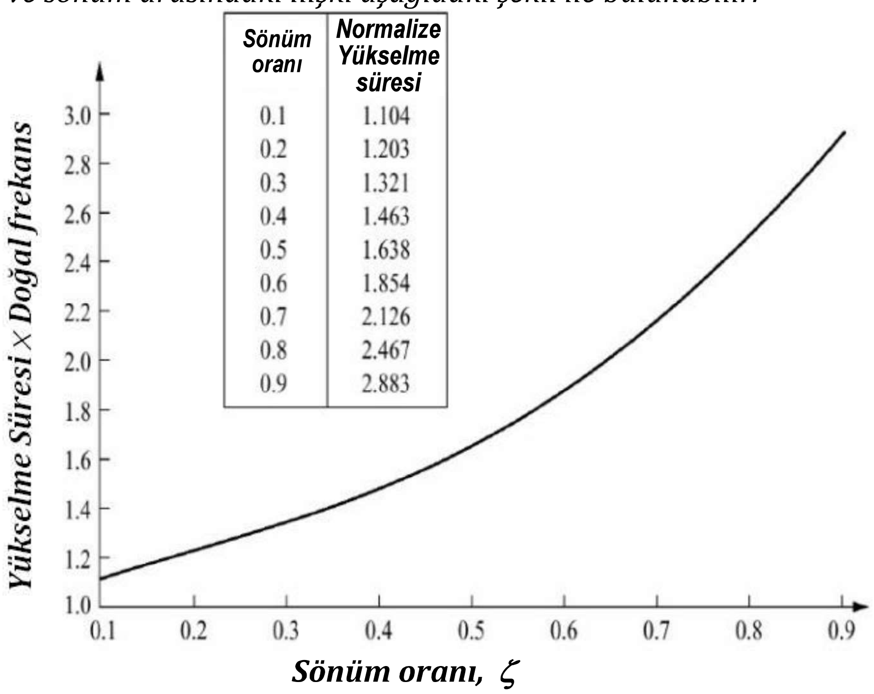
$$0.02 = e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{buradan} \quad T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

ζ'ya bağlı olarak T_s'nin pay'ı 3.91 ile 4.74 arasında değişir. Bir yaklaşım yaparak,

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ *bulunur.*

4. Yükselme Süresi, T_r, nin İncelenmesi

Yükselme zamanı ve sönüm arasındaki ilişki aşağıdaki şekil ile bulunabilir.



Sönüm oranı	Normalize Yükselme süresi
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Örnek: $G(s)=\dfrac{100}{s^2+15s+100}$ Sistemi için, T_p, %OS veT_s'yi bulunuz

$$a = 2\zeta\omega_n \qquad \omega_n = \sqrt{b} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow$$

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{15}{2\sqrt{100}} = 0.75$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{10\sqrt{1-0.75^2}} = 0.475$$

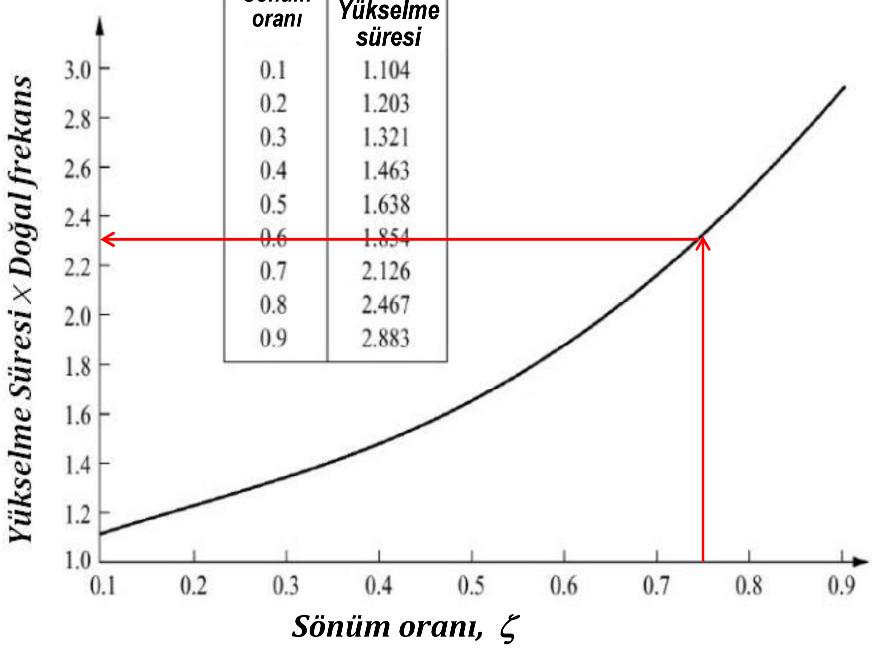
$$\%OS = e^{-(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})} \times 100 = e^{-(\frac{0.75\pi}{\sqrt{1-0.75^2}})} \times 100 = 2.838$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.75\times 10} = 0.533$$

Şekilden

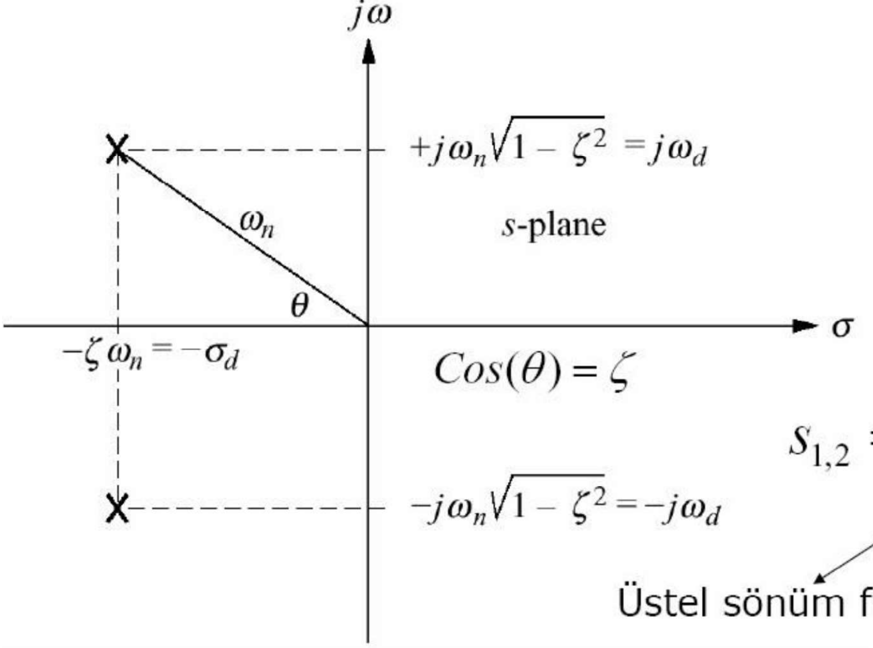
$$T_r = \frac{2.3}{10} = 0.23$$

Sönüm oranı, ζ*=0.75, Doğal frekans,* ω_n*=10rad/s, Yükselme Süresi,* T_r*=0,23s*



Sönüm oranı	Normalize Yükselme süresi
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Sönümlü ikinci derece sistemlerin kutup çizimi



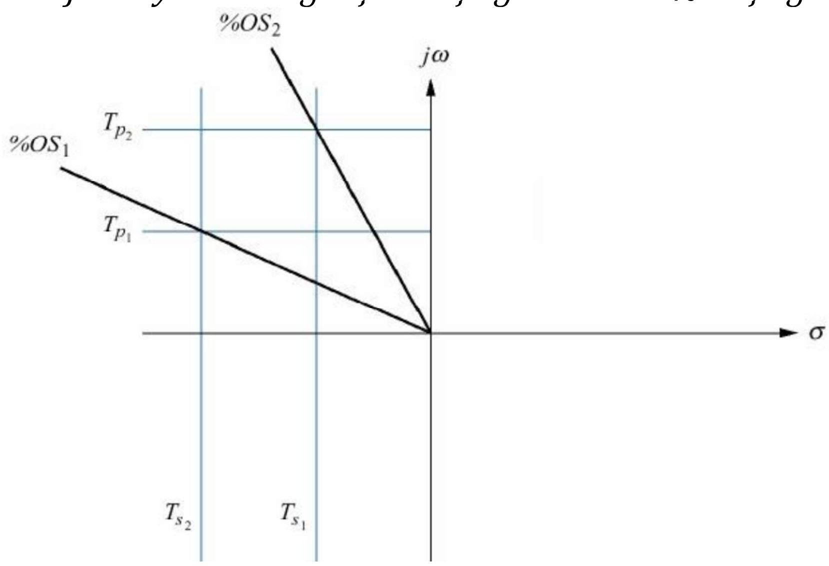
$$s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d$$

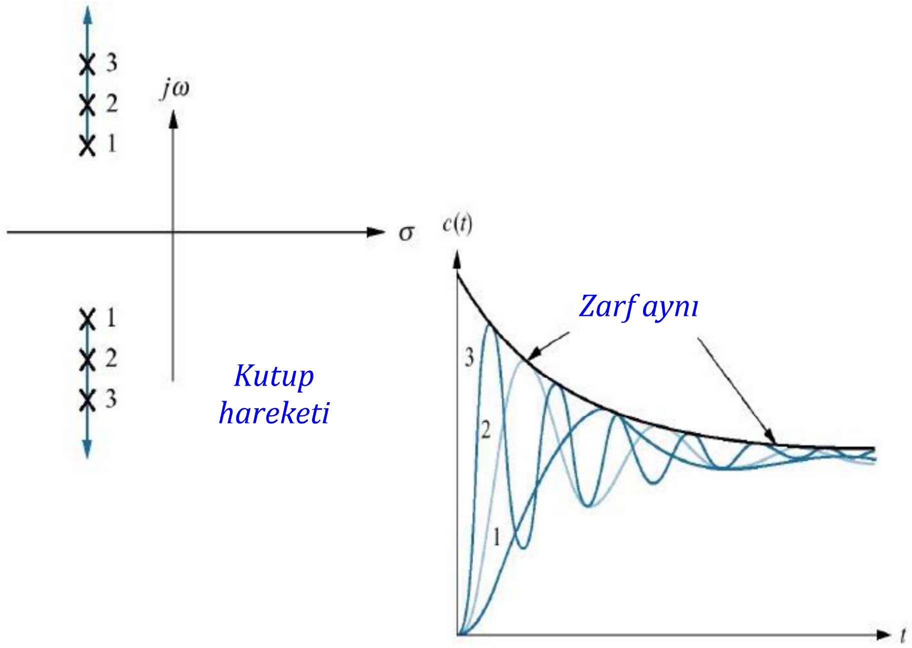
σ_d: Üstel sönüm frekansı

$j\omega_d$: Sönümlü osilasyonun frekansı

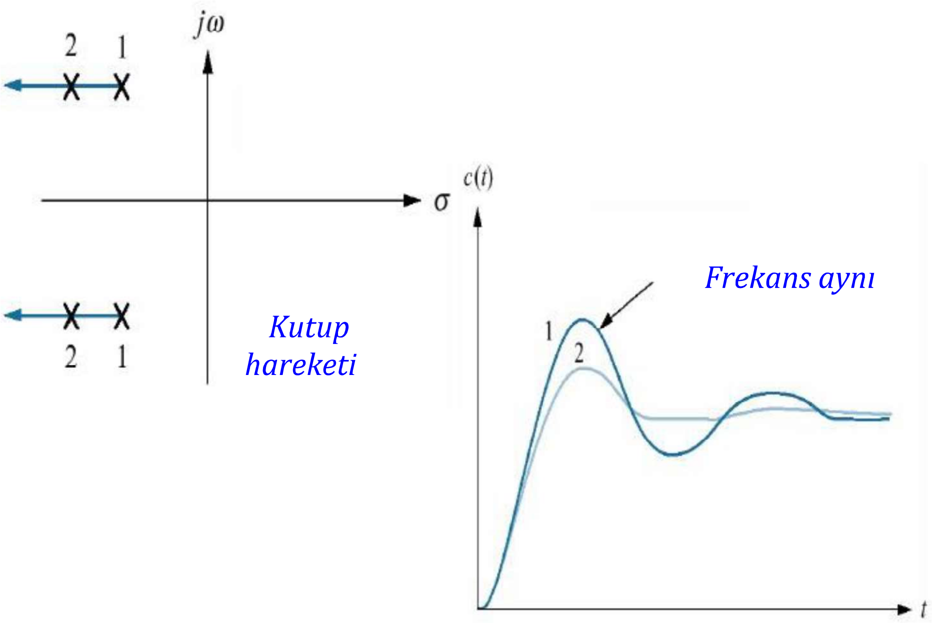
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad T_s = \frac{4}{\sigma_d}$$

Tepe süresi,T_p, kutbun imajiner kısmı ile ters orantılıdır. s düzleminde yatay çizgiler sabit tepe sürelerini gösterir.
Yerleşme süresi,T_s, kutbun reel kısmı ile ters orantılıdır. s düzleminde dikey çizgiler sabit yerleşme sürelerini gösterir.
Sönüm oranı, ζ=Cos(θ) olduğu için eğimli çizgiler sabit sönüm oranı çizgileridir. Ayrıca %OS sadece sönüm oranının fonksiyonu olduğu için bu çizgilere sabit %OS çizgileri de diyebiliriz.

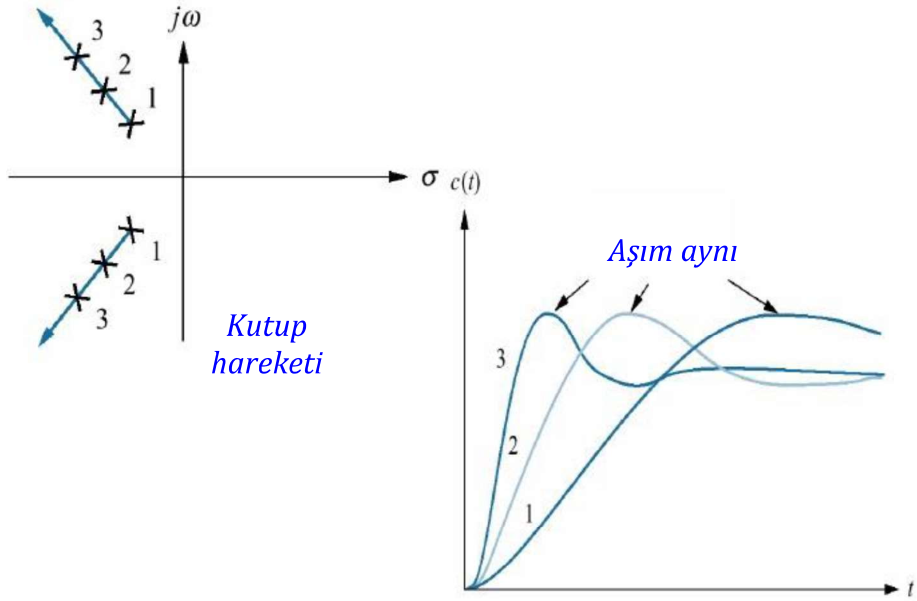




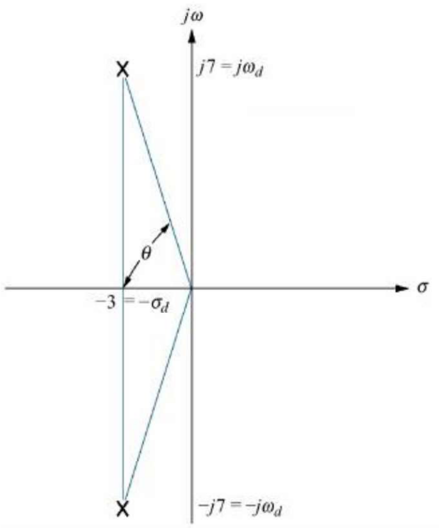
$j\omega$
3
2
1
σ
Kutup
hareketi
$c(t)$
Zarf aynı
t



$j\omega$
2
1
σ
Kutup
hareketi
$c(t)$
Frekans aynı
t



Örnek 4.6. *Aşağıda kutup şekli verilen ikinci derece kontrol sistemi için ζ, ω_n, T_p, %OS ve T_s'yi bulunuz*



$$\zeta = Cos(\theta)$$
$$= Cos(\arctan(7/3)) = 0.394$$

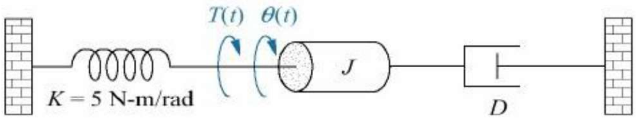
$$\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.616\,rad/s$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0.449s$$

$$\%OS = e^{-(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})} \times 100$$
$$= e^{-(\frac{0.394\pi}{\sqrt{1-0.394^2}})} \times 100 = \%26.018$$

$$T_s = \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1.33s$$

Örnek:



$$G(s) = \frac{1/J}{s^2 + \frac{D}{J}s + \frac{K}{J}}$$

Sisteminin birim basamak Tork girişine cevabında %20 lik bir aşım ve 2 sn yerleşme zamanı olması için J ve D ne olmalıdır.

$$\omega_n = \frac{K}{J} \;\; ve \;\; 2\zeta\omega_n = \frac{D}{J}; \;\; T_s = 2 = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \quad \zeta\omega_n = 2$$

$$2\zeta\omega_n = 4 = \frac{D}{J} \quad \text{ve} \quad \zeta = \frac{4}{2\omega_n} \Rightarrow \quad \zeta = 2\sqrt{\frac{J}{K}}$$

OS %20 ise ζ=0.456(şekilden) ise $\frac{J}{K} = 0.052$

K=5 olduğundan, J=0.26kg-m² ve D=1.04 N-ms/rad

Kutup eklenmesi durumunda Sönümlü ikinci derece sistemin yanıtı

Şimdiye kadar yaptığımız analizler ve denklemler sıfırı olmayan eşlenik kompleks kutuplu ikinci derece sistemler içindi. İkiden fazla kutbu veya sıfırları olan sistemler için bu denklemleri kullanamayız.
Ancak, bazı şartlar altında, ikiden fazla kutbu ve sıfırları olan sistemler dominant iki eşlenik kompleks kutbu olan sistem gibi ele alınabilir. Bu bölümde 1 kutbun ilave edilmesi halini inceleyeceğiz.
Varsayalım ki 3 derece bir sistemin eşlenik kökleri:

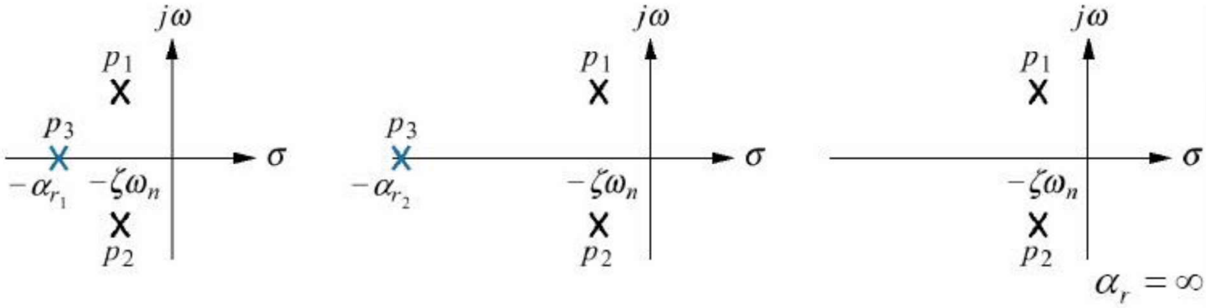
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ve üçüncü kök $-\alpha_r$ *reel eksen üzerinde olsun*
Birim basamak yanıtı kısmi kesirlere ayırma yöntemi ile belirlenebilir:

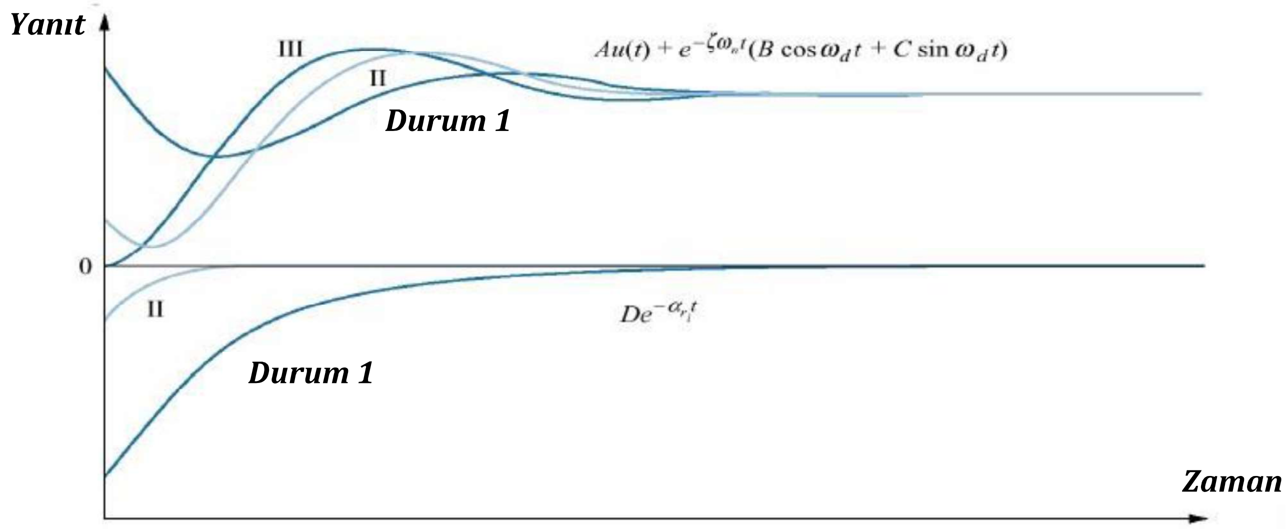
$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+\zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{(s+\alpha_r)}$$

Zaman tanım aralığında:

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}\left[BCos(\omega_d t) + CSin(\omega_d t)\right] + De^{-\alpha_r t}$$



Durum 1 ***Durum 2*** ***Durum 3***



Üçüncü kutbun etkisinin ihmal edilebilir olması için dominant kutuplardan ne kadar uzak olması gerekir?
Bu tamamen istenilen hassasiyete bağlıdır ama genel olarak üstel düşüm 5 zaman sabiti sonunda ihmal edilebilir kabul edilir.
Böylece eğer üçüncü kök baskın köklerin 5 kat solunda ise sitemi ikinci derece kabul edebiliriz.
Bu üstel düşümün genliği ne kadar? Tepe süresine etkisi ihmal edilebilir mi?

$$C(s) = \frac{bc}{s(s^2 + as + b)(s + c)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + as + b} + \frac{D}{(s + c)}$$

*Baskın olmayan üçüncü kök reel eksende **–c** olsun ve kararlı hal çözümü birim yanıta yaklaşsın. Bu durumda paydaki katsayıları sırası ile hesapladığımızda,*

$$A = 1; \qquad B = \frac{ca - c^2}{c^2 + b - ca}$$

$$C = \frac{ca^2 - c^2 a - bc}{c^2 + b - ca}; \qquad D = \frac{-b}{c^2 + b - ca}$$

$c \to \infty$ A=1, B=-1, C=-a, D=0
Bunun sonucunda baskın olmayan kutup sonsuza yaklaştığında D kısmı kesir katsayısı sıfır olmakta ve sistemin yanıtını oluşturmaktadır.

Örnek:

$$T_1(s)=\frac{24.542}{s^2+4s+24.542}\qquad T_2(s)=\frac{245.42}{(s+10)(s^2+4s+24.542)}$$

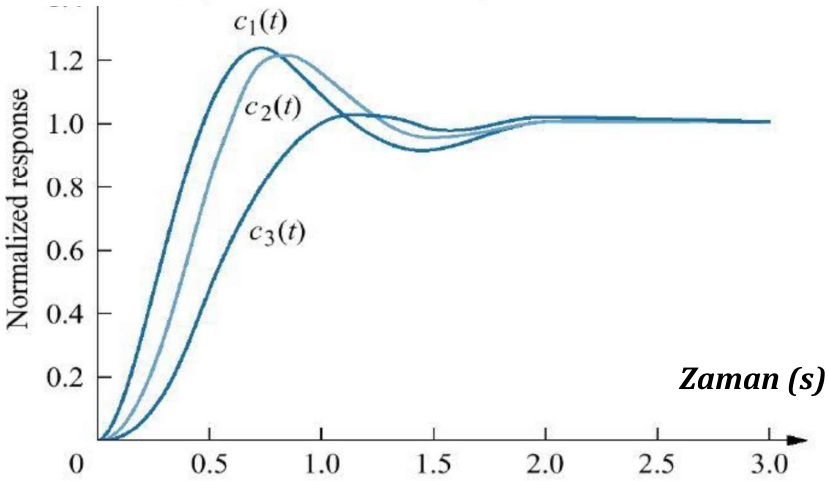
$$T_3(s)=\frac{73.626}{(s+3)(s^2+4s+24.542)}$$

Sistemlerinin birim basamak cevaplarını bulup karşılaştırınız.

$$c_1(t)=1-1.09e^{-2t}Cos(4.532t-23.8^0)$$

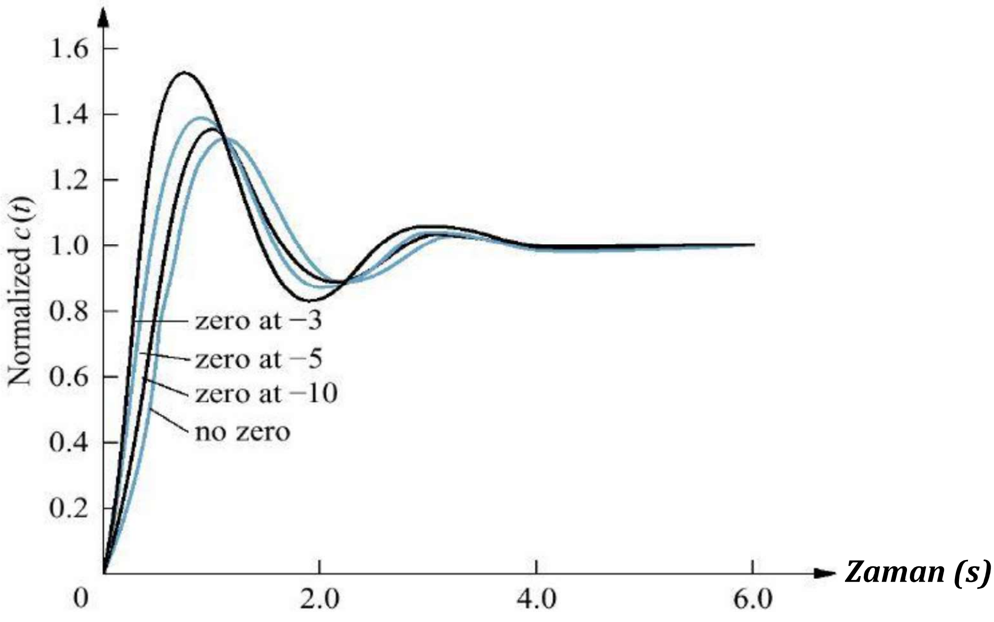
$$c_2(t)=1-0.29e^{-10t}-1.189e^{-2t}Cos(4.532t-53.34^0)$$

$$c_2(t)=1-1.14e^{-3t}-0.707e^{-2t}Cos(4.532t-78.63^0)$$



Sıfır eklenmesi durumunda Sönümlü ikinci derece sistemin yanıtı

İki kutuplu ikinci derece sisteme bir reel sıfır ekleyelim.
Sistemin kutupları eşlenik () olsun ve sırasıyla-3, -5 ve -10 sıfırlarını ekleyelim.



Şekilden görüleceği üzere sıfır baskın kutuplara ne kadar yakın ise geçici rejimdeki etkisi daha fazla olur.
Sıfır baskın kutuplardan uzaklaştıkça sistem yanıtı ikinci derece sistem yanıta benzer.
Sistem yanıtını kısmi kesirlere açarak inceleyelim:

$$T(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)} = \frac{A}{(s+b)} + \frac{B}{(s+c)}$$

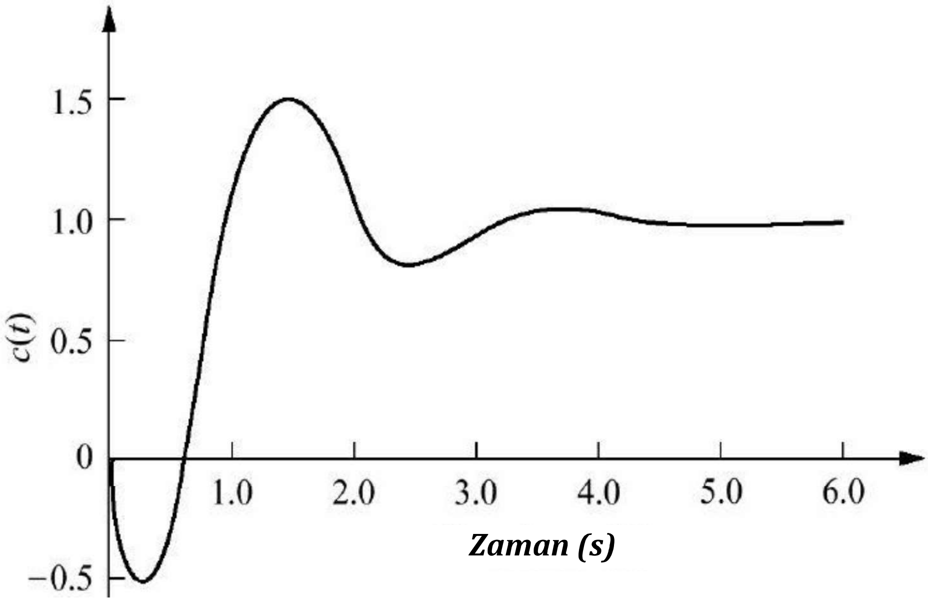
$$= \frac{(-b+a)/(-b+c)}{(s+b)} + \frac{(-c+a)/(-c+b)}{(s+c)}$$

Eğer a, b ve c'ye göre çok büyük ise:

$$T(s) = a\left[\frac{1/(-b+c)}{(s+b)} + \frac{1/(-c+b)}{(s+c)}\right] = \frac{a}{(s+b)(s+c)}$$

Sıfır basit bir kazanç katsayısı olarak davranır.

Eğer ikinci derece sisteme sağ yarı düzlemde bir reel sıfır eklenirse:



Şekilden görüleceği üzere son değer pozitif olmasına karşın başlangıçta bir süre negatif çıkış üretir. Bu tür sistemlere non-minumum faz sistemler denir.

Üçüncü derece sistemde Sıfır-Kutup yok edilmesi

$$T(s) = \frac{K\cancel{(s+z)}}{\cancel{(s+p_3)}(s^2+as+b)}$$

*Eğer **z** sıfırı ile **p3** kutbu birbirini götürürse veya birbirine çok yakınsa üçüncü derece sistem ikinci derece sistem gibi davranır.*

Kaynaklar

1. *Otomatik Kontrol Sistemleri, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999.*
2. *Automatic Control Systems, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley,2010.*
3. *Modern Control Systems, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Prentice Hall, 2011.*
4. *Control System Engineering, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.*
5. *Modern Control Engineering, K.OGATA, Prentice-Hall, 1997.*
6. *Feedback and Control Systems, Joseph J.Distefano, Allen R.Stubberrud, Ivan J.Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.*
7. *Ders Notları için İnternet Adresi: http://www.tuncayuzun.com/ , http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/*