EHM3132 Gr.1

Otomatik Kontrol

Bölüm 5
Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemlerin, Kararlılık ve Kararlı Hal Hata Analizi

Kararlılık Analizi

Doğrusal zamanla değişmeyen kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında üç ölçüt dikkate alınır. Bunlar:

1. Geçici Rejim Cevabı
2. Kararlılık
3. Kararlı Hal Hataları

Daha önceki bölümde karalı hal yanıtı yalnız zorlanmış yanıta bağlı olduğunda sistemin çıkışını kontrol edebileceğimizi incelemiştik. Fakat sistemin tam çözümü aşağıdaki gibi zorlanmış yanıt ile doğal yanıtın toplamıdır.

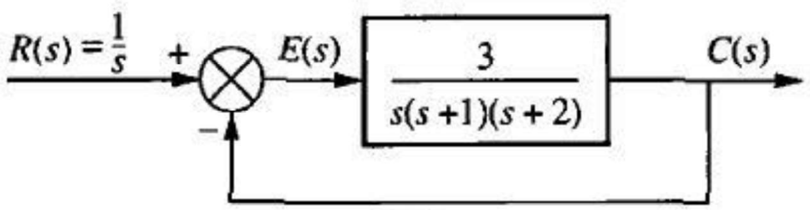
$c(t) = c_{zorlanmış}(t) + c_{doğal}(t)$

Bunun sonucunda, kararlılık, kararsızlık ve marjinal kararlılık tanımlamalarını aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

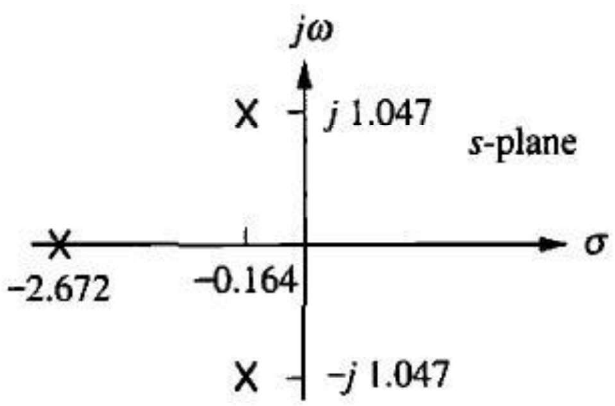
- *Eğer $t \rightarrow \infty$ 'a giderken doğal yanıt sıfıra yaklaşıyorsa doğrusal zamanla değişmeyen kontrol sistemi **kararlı**dır.*
- *Eğer $t \rightarrow \infty$ 'a giderken doğal yanıt sınırsız bir şekilde artıyorsa doğrusal zamanla değişmeyen kontrol sistemi **kararsız**dır.*
- *Eğer $t \rightarrow \infty$ 'a giderken doğal yanıt azalmıyorsa yeya artmıyorya, sabit kalıyorsa veya osilasyon yapıyorsa doğrusal zamanla değişmeyen kontrol sistemi **marjinal kararlı**dır.*

- *Genel yaklaşımla, her sınırlandırılmış girişle bağlanmış, sınırlandırılmış bir çıktı verirse sistem kararlıdır.*
  Biz bunu sınırlı-giriş, sınırlı çıkış (Bounded-Input Bounded-Output, BIBO) karalılık olarak tanımlıyoruz.
- *Diğer bir tanımda: Kapalı Çevrim Kontrol Sisteminin,*
  - *Transfer fonksiyonunun bütün kutupları yalnız s-düzleminin sol yarısında ise sistem kararlıdır.*
  - *Transfer fonksiyonunun kutuplarından yalnız biri s-düzleminin sağ yarısında olsa bile sistem kararsızdır.*
  - *Transfer fonksiyonunun kutupları yalnız s-düzleminin imajiner, jω ekseni üzerinde ve katsız ise sistem, sinüzoidal osilasyon yapar, marjinal kararlıdır.*

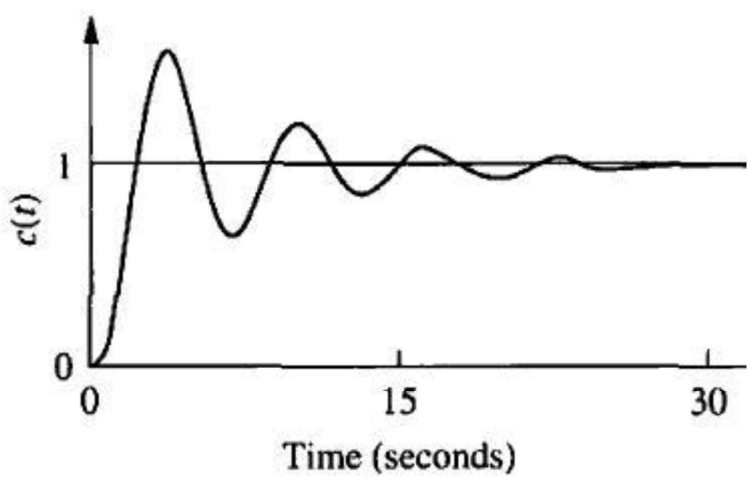
Kararlı sistem için bir örnek:



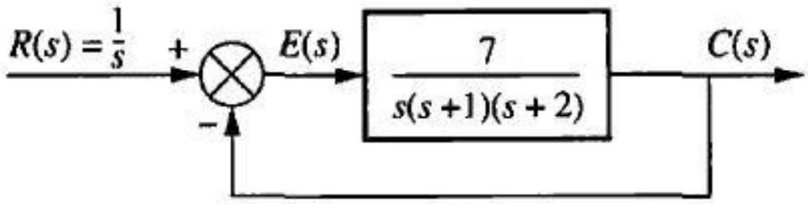
Stable system



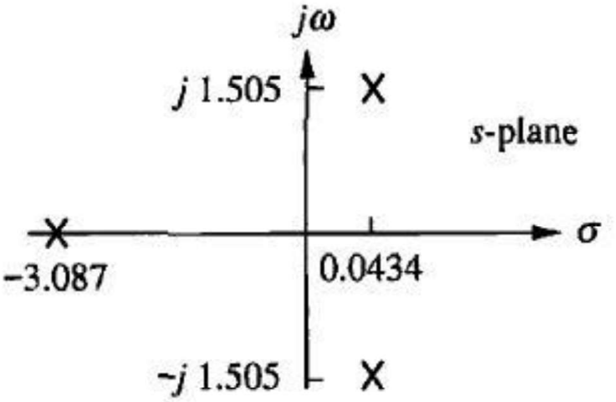
Stable system's closed-loop poles (not to scale)



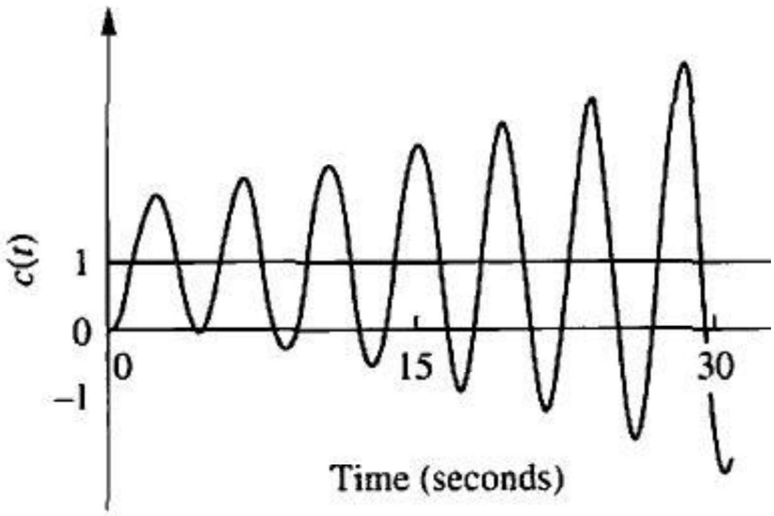
Kararsız sistem için bir örnek:



Unstable system

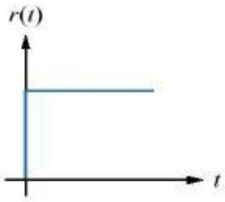
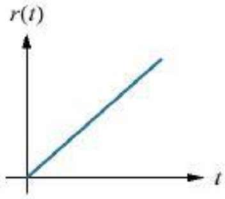
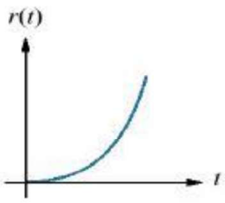


Unstable system's closed-loop poles (not to scale)



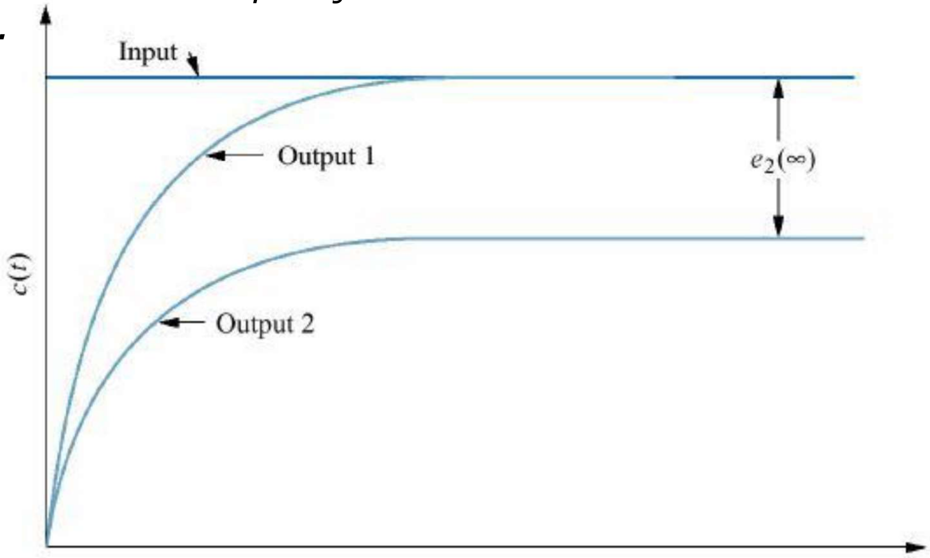
Kararlı Hal Hata Analizi

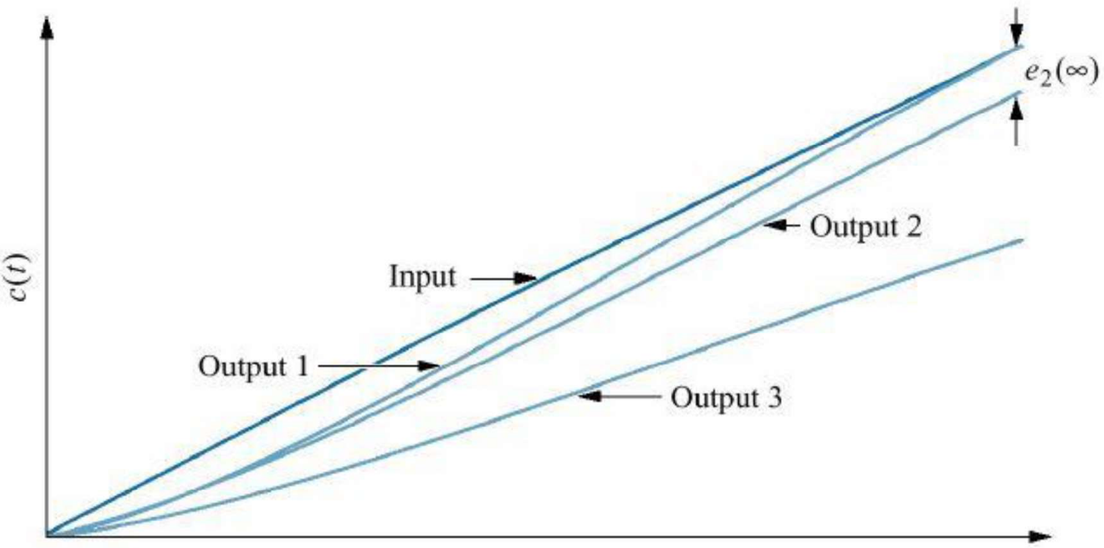
Kararlı hal hatası, aşağıda verilen şekilde önceden belirlenmiş bir giriş test işareti için $t \to \infty$ 'a giderken giriş ve çıkış işareti arasındaki farktır.

Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

- *Birim basamak test girişi sabit konumu temsil eder ve kontrol sisteminin sabit bir hedefe göre yerini bulma kabiliyetini belirler. Özetle sistemin gitmesini istediğimiz konum basamak girişidir.*
- *Rampa girişi sabit hızı temsil eder. Lineer olarak artan girişi takip edebilme yeteneğini test edebilmek için kullanılır.*
- *Parabol girişi sabit ivmeyi temsil eder, hızlanan hedefler için kullanılır.*

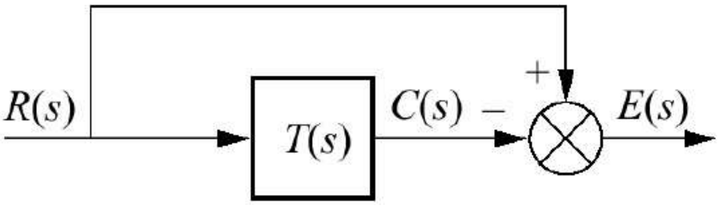
Kararlı hal hataları, t →∞'a giderken doğal çözüm sıfıra yaklaştığında veya bir başka deyişle kararlı sistemler için tanımlıdır. Bu nedenle tasarımcı kararlı hal hatasını belirlemeden önce mutlaka kapalı çevrim kontrol sisteminin kararlılığını incelemelidir.



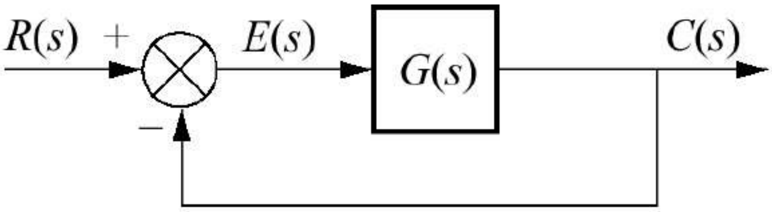


Giriş (Referans) ve çıkış arasındaki fark, "hata" olarak tanımladığından, kapalı çevrim sistem transfer fonksiyonu T(s) iken blok diyagram üzerinde:
Hata, (Error) : $\mathbf{E(s) = R(s) - C(s)}$

Genel Gösterim

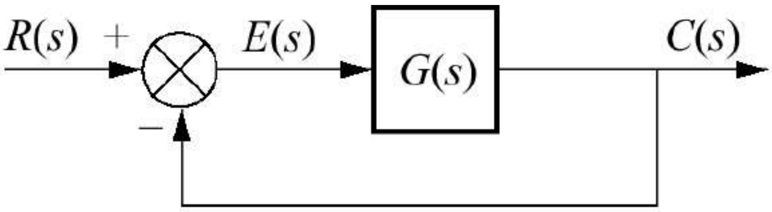


Birim Geri beslemeli Gösterim



Kontrol sistemlerinde sürekli hal hataları genellikle lineer olmayan (nonlinear) kaynaklardan ortaya çıkar. Örneğin dişlilerdeki boşluk veya motora uygulanan gerilimin belli bir eşik değerini geçmeden motorun hareket etmemesi gibi durumlarda hata oluşur.

Ayrıca sürekli hal hataları sistem bağlantı şeklinden veya uygulanan giriş tipinden kaynaklanabilir ki biz bunların üzerinde duracağız.
$\mathbf{E(s) = R(s) - C(s)}$
Birim basamak girişini düşünelim:
Eğer sürekli halde c(t), r(t)'ye eşit olursa e(t)=0 olur. Fakat sadece K kazancı ile c(t) sonlu ve sıfırdan farklı olmakla beraber e(t) hiçbir zaman sıfır olamaz. Sadece K kazancı olması durumunda mutlaka küçük bir hata olur.



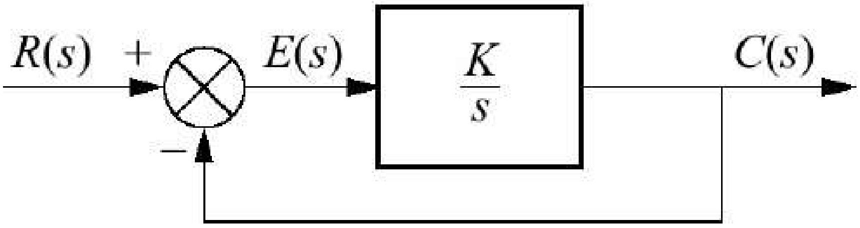
$E(s) = R(s) - C(s) \qquad E(s) = R(s) - KE(s)$

$C(s)=KE(s) \qquad R(s) = E(s) + KE(s) = (1+K)\, E(s)$

$$E(s) = \frac{1}{1+K} R(s)$$

Görüldüğü gibi birim basamak girişi için K ne kadar artarsa artsın hata o kadar azalır fakat sıfır olamaz. Çünkü K kazancının değeri sınırlıdır.

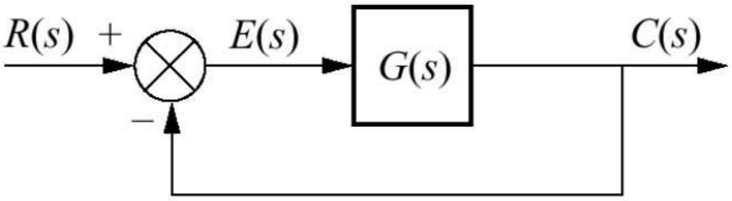
Eğer ileri yola integratör ekleyecek olursak:



$$e(t) = r(t) - c(t)$$

c(t) büyüdükçe e(t) azalır ki bu e(t) sıfır olana kadar devam eder. Hata sıfırlanmış olsa da integratör çıkışı olan c(t)'nin bir değeri vardır. Çünkü integratör sıfır girişe sabit bir çıkış verir.
Örneğin, bir motor düşünelim. Motora gerilim uygulandıkça motor döner, gerilim kesildiğinde ise motor o anki konumunda durur. Motora giriş olmamasına rağmen başlangıç konumu ile durduğu konum arasında açısal bir konum değişimi oluşmuştur. Dolayısıyla motoru basitçe bir integratör olarak düşünebiliriz. Ayrıca, eğer bir motoru ileri yola bağlayacak olursak birim basamak girişine sürekli hal hatası her zaman sıfır olur.

Birim Geri beslemeli Kontrol Sistemi İçin Sürekli Hal Hatalarının Elde Edilmesi



*Geri beslemede **H(s)**olmazsa sisteme birim geri beslemeli sistem denir.*

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = E(s)G(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

Sürekli halde hatayı, e(t)'yi t →∞a giderken, bir başka deyişle e(∞)'u bulmaya çalışıyoruz. Bunun için son değer teoremini kullanabiliriz.

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Son Değer Teoremi: *Sürekli hal hatalarında son değer teoreminin kullanılabilmesi için son değerini bulmak istediğimiz F(s)'in kutuplarının sol yarı düzlemde olması gerekir, en fazla bir kutbu* *orijinde olabilir. Eğer orijinde birden fazla kutup veya sağ yarı düzlemde en az bir kutup varsa son değer teoremi geçersizdir.*

Giriş İşaretleri İçin Sürekli Hal Hataların İncelenmesi:

- ***Birim Basamak Giriş İşareti İçin Sürekli Hal Hatası:***

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s(\frac{1}{s})}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}$$

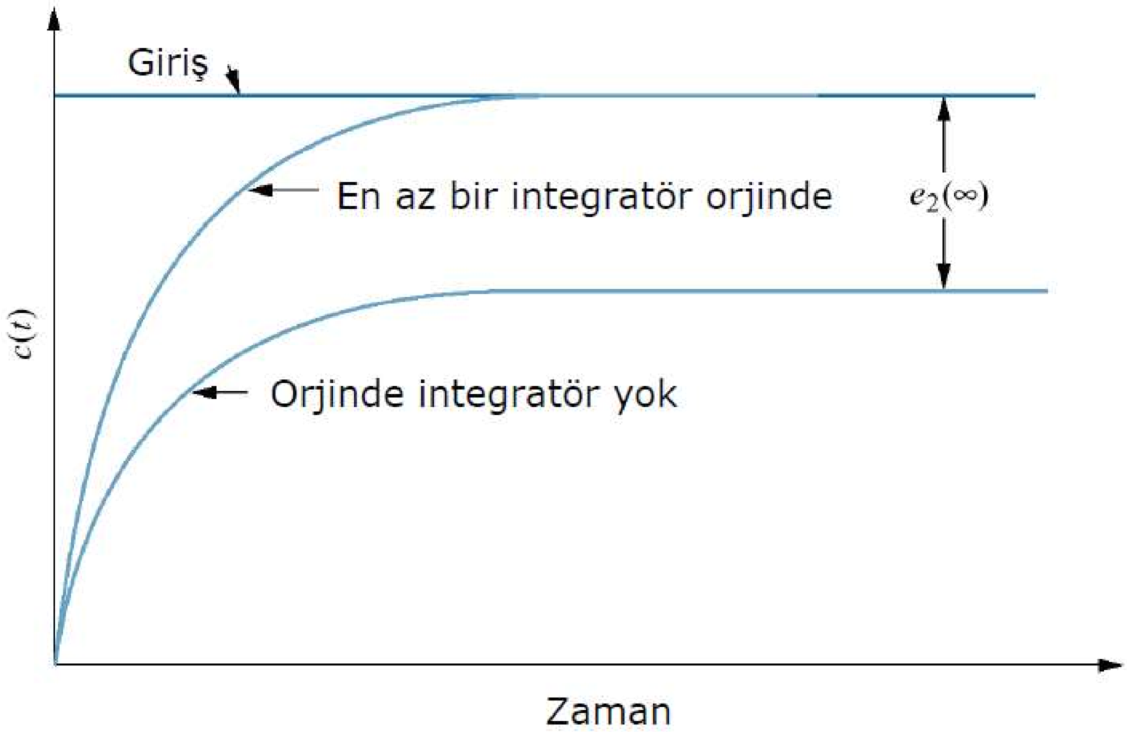
Buna aynı zamanda ileri yol transfer fonksiyonunun doğru akım (DC) kazancı denir.

Sürekli hal hatasının sıfır olabilmesi için $\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$ *olmalıdır.*
(DC kazanç sonsuz olmalıdır.)

$\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$ olabilmesi için G(s) aşağıdaki formda olmalıdır.

$$G(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots\ldots\ldots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Daha da açık ifade etmek gerekirse polinomun paydasının en az bir kökü orijinde olmalıdır. Teknik ifade ile birim basamak cevabında sürekli hal hatasının 0 olabilmesi için ileri yolda en az bir saf integratör olmalıdır. Eğer orijinde en az bir kutup yoksa bu sonlu bir sürekli hal hatasına karşılık gelir.



• Rampa Giriş İşareti İçin Sürekli Hal Hatası:

Rampa giriş işareti: $R(s)=\dfrac{1}{s^2}$ dir.

Rampa girişi için sürekli hal hatası:

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s(\frac{1}{s^2})}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)}$$

Rampa giriş işaretinde sürekli hal hatamızın sıfır olabilmesi için,

$\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=\infty$ olmalıdır.

$G(s)=\dfrac{(s+z_1)(s+z_2)........}{s^n(s+p_1)(s+p_2).........}$ Göz önüne alındığında

En az iki kutup orijinde olursa ancak rampa girişinde sürekli hal hatası sıfır olur.
İleri yolda iki saf integratör olmalı ki rampa girişi için sürekli hal hatası sıfır olsun. Eğer bir integratör varsa, sabit bir hatanın olacağını gösterir.
Eğer ileri yolda hiç integratör yoksa sürekli hal hatası rampa girişinden zamanla uzaklaşarak sonsuz olur.

• Parabolik Giriş İşareti İçin Sürekli Hal Hatası:

Parabolik giriş işareti: $R(s)=\dfrac{1}{s^3}$ dir.

Rampa girişi için sürekli hal hatası:

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s(\frac{1}{s^3})}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)}$$

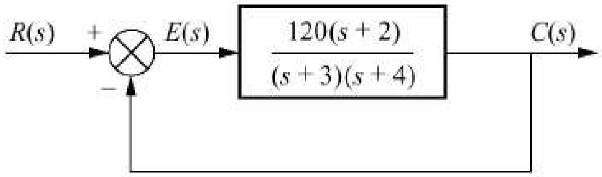
Parabolik giriş işaretinde sürekli hal hatamızın sıfır olabilmesi için,

$\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)=\infty$ olmalıdır.

$G(s)=\dfrac{(s+z_1)(s+z_2)........}{s^n(s+p_1)(s+p_2).........}$ Göz önüne alındığında

En az üç kutup orijinde olursa parabolik girişinde sürekli hal hatası sıfır olur.
İleri yolda iki saf integratör varsa, sabit bir hatanın olacağını gösterir.
Eğer ileri yolda bir integratör varsa veya hiç yoksa sürekli hal hatası parabolik girişinden zamanla uzaklaşarak sonsuz olur.

Örnek:



Yukarıdaki sisteme 5u(t), 5tu(t), ve 5t²u(t) girişleri uygulandığında sürekli hal hatalarını bulunuz.

5u(t) girişinin laplas dönüşümü 5/s dir. Buna göre;

$$e(\infty) = \frac{5}{1 + \lim\limits_{s \to 0} G(s)} \qquad \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{120(2)}{(3)(4)} = 20 \qquad e(\infty) = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21}$$

5tu(t) girişinin laplas dönüşümü 5/s² dir. Buna göre;

$$e(\infty) = \frac{5}{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)} \qquad \lim_{s \to 0} sG(s) = (0)\frac{120(2)}{(3)(4)} = 0 \qquad e(\infty) = \frac{5}{0} = \infty$$

5t²u(t) girişinin laplas dönüşümü 10/s³ dir. Buna göre;

$$e(\infty) = \frac{10}{\lim\limits_{s \to 0} s^2 G(s)} \qquad \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = (0)^2 \frac{120(2)}{(3)(4)} = 0 \qquad e(\infty) = \frac{10}{0} = \infty$$

Statik Hata Katsayıları ve Sistemin Tipi

Birim basmak girişi için ,u(t),

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s \to 0} G(s)}$$

Rampa girişi için ,tu(t),

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)}$$

Parabol girişi için ,(1/2)t2u(t),

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} s^2 G(s)}$$

Paydadaki limit ifadeleri sürekli hal hatalarını belirliyor, bu limit terimlerine statik hata katsayıları adı verilir.

Konum Sabiti ,K_p,

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Hız Sabiti ,K_v,

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

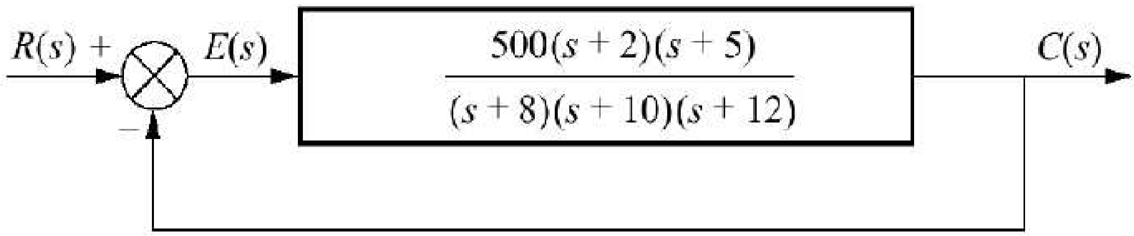
İvmelenme Sabiti ,K_a,

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

Sürekli hal hataları ise,

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \qquad e(\infty) = \frac{1}{K_v} \qquad e(\infty) = \frac{1}{K_a}$$

Örnek:



Yukarıdaki sistemin statik hata katsayılarını bulunuz, birim basamak, rampa ve parabolik giriş işaretlerine karşı oluşacak sürekli hal hatalarını belirleyiniz.

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) \quad = \frac{(500)(2)(5)}{(8)(10)(12)} = 5.208 \qquad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = 0$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = 0$$

Konum Girişi için:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0.161$$

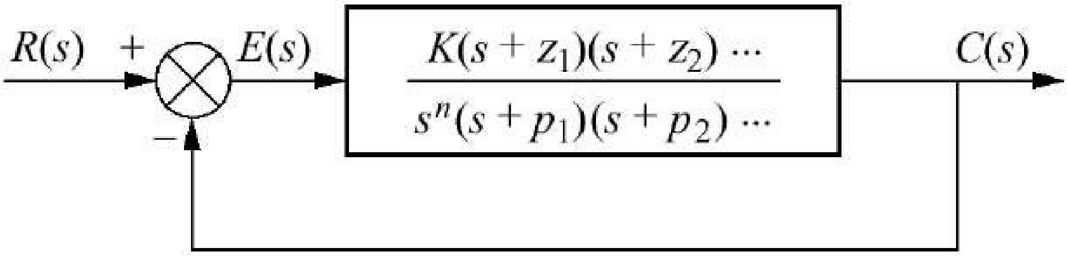
Hız Girişi için:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_V} = \infty$$

İvme Girişi İçin:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

Sistem Tip'i Tanımı:



*İleri yoldaki saf integratör sayısı sistemin tip'i olarak tanımlanır. Yukarıdaki sistemin tip'i **n**dir. Örneğin, eğer n=0 ise sistemin tip'i sıfır, eğer n=1 ise sistemin tip'i birdir. Sırasıyla **Tip 0**ve **Tip 1**olarak ifade edilirler.*

Özet

		Type 0		Type 1		Type 2	
Input	Steady-state error formula	Static error constant	Error	Static error constant	Error	Static error constant	Error
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constant	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constant	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constant	$\frac{1}{K_a}$

Örnek: *Eğer bir sistemin hız sabiti, **Kv=1000** ise bu sistem hakkında neler söyleyebilirsiniz.*

1. Sistem kararlıdır.

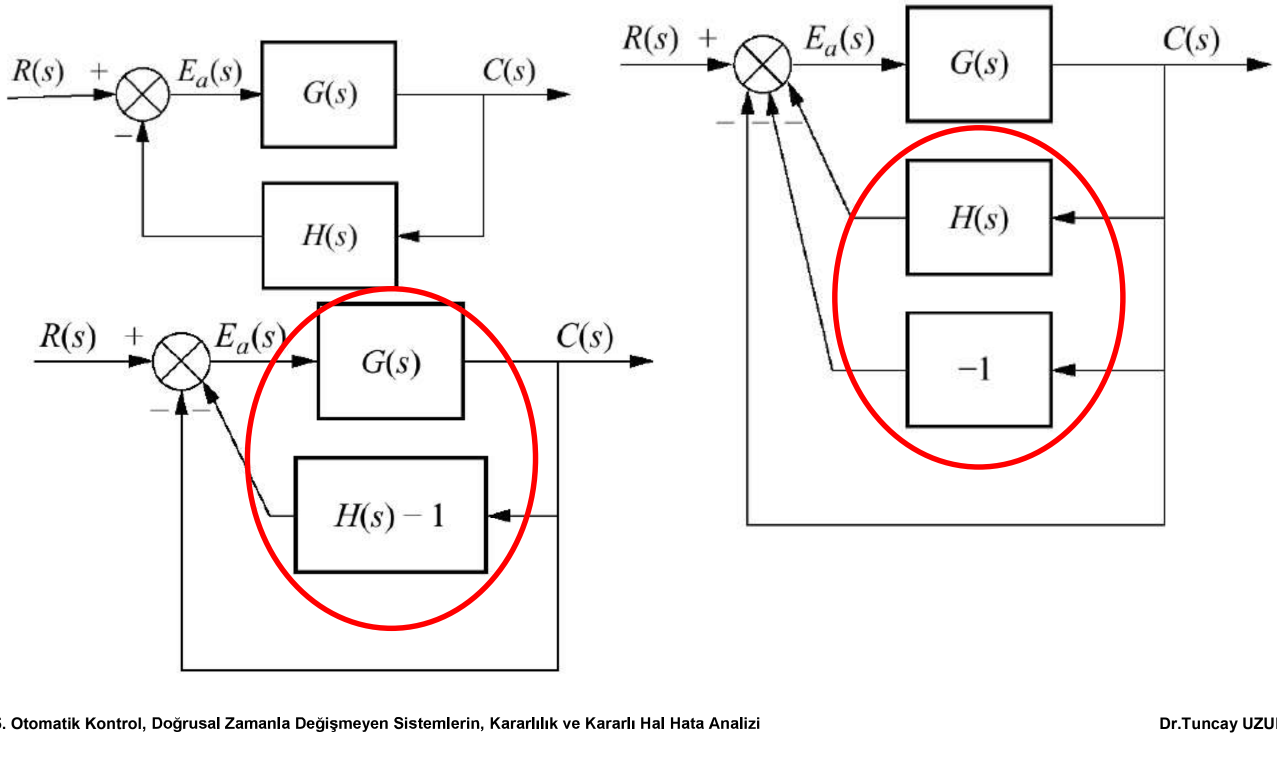
*2. Sistem **Tip 1** dir. Hatırlanacak olursa **Tip 0** sistemlerde **Kv=0**, Tip 2 sistemlerde ise **Kv** sonsuzdur.*

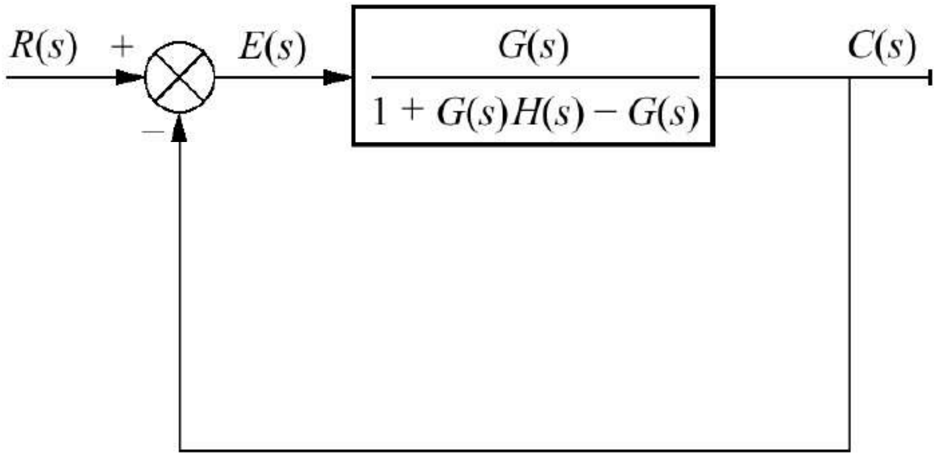
3. Test işareti rampadır ve rampa giriş işareti uygulandığında sürekli hal hatası hız sabiti ile ters orantılıdır.

*4. Giriş rampa işareti ve çıkış rampa işareti arasındaki sürekli hal hatası **1/Kv** dir.*

Birim Geri beslemeli Olmayan Sistemler için Sürekli Hal Hataları

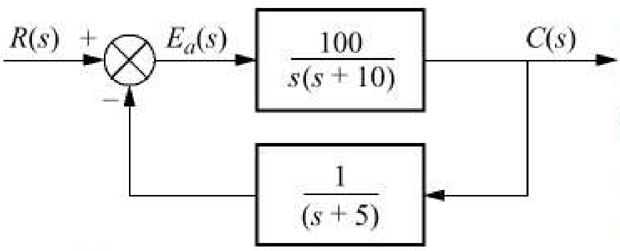
Başarımı ölçütlerini iyileştiren dengeleyici ve denetleyicilerin kullanılması veya sistemin fiziksel yapısı nedeniyle çoğu kontrol sistemi birim geri beslemeli değildir.





Böylece sistemi birim geri beslemeli hale dönüştürülerek daha önce belirtilen şekilde sürekli hal hata analizi yapılabilir.

<u>Örnek:</u>



Sistemin Tip'i nedir? Uygun hata sabitini sistem Tip'ine göre belirleyiniz. Birim basamak için sürekli hal hatasını bulunuz.

$$G(s)=\frac{100}{s(s+10)} \qquad H(s)=\frac{1}{(s+5)}$$

$$G_e(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)-G(s)} \qquad =\frac{100(s+5)}{s^3+15s^2-50s-400}$$

Saf integratör olmadığı için sistem **Tip 0** dır. Uygun hata sabiti bu durumda konum hata sabiti $\mathbf{K_p}$ dir.

$$K_p=\lim_{s\to 0} G_e(s)=\frac{(100)(5)}{(-400)}=-\frac{5}{4} \longrightarrow e(\infty)=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1-\frac{5}{4}}=-4$$

<u>İşaretin negatif olması çıkış değerinin giriş değerinden büyük olduğunu gösterir.</u>

Kaynaklar

1. *Otomatik Kontrol Sistemleri, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999.*
2. *Automatic Control Systems, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley,2010.*
3. *Modern Control Systems, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Prentice Hall, 2011.*
4. *Control System Engineering, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.*
5. *Modern Control Engineering, K.OGATA, Prentice-Hall, 1997.*
6. *Feedback and Control Systems, Joseph J.Distefano, Allen R.Stubberrud, Ivan J.Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.*
7. *Ders Notları için İnternet Adresi: http://www.tuncayuzun.com/ , http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/*