

EHM3132 Gr.1

Otomatik Kontrol

Bölüm 6

Köklerin Yer Eğrisi Yöntemi

Köklerin Yer Eğrisi Yöntemi

Kontrol sistemlerin analizi ve tasarımında dört farklı yöntem kullanılmaktadır. Bunlar:

- 1. Kök Yer Eğrisi (Root-Locus) grafik yöntemi,*
- 2. Bode diyagramı*
- 3. Nyquist kriteri*
- 4. Nicholas-chart diyagramı*

Kök Yer Eğrisi, ilk olarak California Üniversitesinde lisans öğrencisi iken Walter R. Evans (1922-1999) tarafından 1948 yılında ortaya atılmıştır.

Doğrusal zamanla değişmeyen geri beslemeli kontrol sisteminin kararlı olup olmadığı ve kararlılık derecesi, diferansiyel denklem çözmeden analizi yapılarak sistem performansı belirlenebilir.

Ayrıca açık çevrim sistemin analiz edilmesi, kapalı çevrim sistemin nasıl davranacağı hakkında bilgi edinilebilmesi açısından çok önemlidir. Bununla ilgili yöntemlerden birisi sistem için kök yer eğrisinin oluşturulması ve yorumlanmasıdır. Bu yöntem bir grafik analiz yöntemidir ve bu grafik üzerinden birçok değer (K , ζ , s , ω_n , %OS, ω_d , gibi) okunabilmektedir.

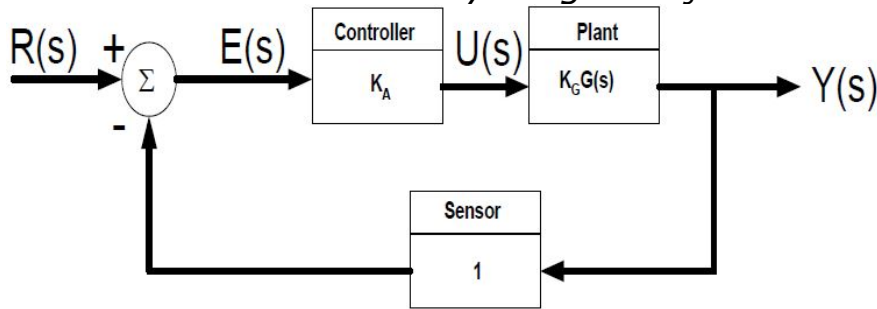
Tanım: Kök yer eğrisi sistem parametrelerinin değişimi ile sistemin kapalı çevrim köklerinin s düzlemindeki yerini gösteren grafikdir.

Kapalı çevrim sistemlerin geçici rejim yanıt karakteristikleri kapalı çevrim kutuplarının yerlerine bağlıdır. Eğer sistem değişken kazançta sahipse, kapalı çevrim sistemin kutupları seçilen kazançta göre değişir. Dolayısıyla kontrol sisteminin çevrim kazancı değiştikçe kapalı çevrim sisteminin kutuplarının nasıl hareket ettiğinin bilinmesi önemlidir.

Amaç: İstenilen sistem yanıtını elde edebilmek için uygun kutuplar seçmek ve dolayısıyla bu kutuplar için sistem kazancını belirlemektir

Kök Eğrisi Çizimi:

Blok diyagramı verilen kapalı çevrim geri beslemeli bir kontrol sisteminin transfer fonksiyonu ve karakteristik denkleminde bütün köklerin genel ifadesi elde edilerek kök yer eğrileri çizilebilir.



$$H(s)=1 \text{ için Transfer fonksiyonu: } \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_A K_G G(s)}{1 + K_A K_G G(s) \cdot 1} \quad G(s) = -\frac{1}{K}$$

$$\text{Karakteristik denklemi: } 1 + K_A K_G G(s) = 0 \Rightarrow 1 + KG(s) = 0$$

Kapalı çevrim kutupları denetleyici (Amplifikatör) kazancı K_A 'ya bağlıdır. K_A 'yı 0 dan sonsuza değiştirerek olası bütün kökleri çizerek bizim için en uygun K_A değerini çizimden elde edebiliriz.

$$G(s) = K \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{(s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)} \Rightarrow F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$$

- Sistemin kararlılığı incelenirken, paydayı sıfır yapan değer sistemi kararsız hale getireceğinden dolayı buradan, $1 + K \cdot G(s) = 0$ yazılabilir. Kompleks düzlemde bu denklem incelendiğinde, $K \cdot G(s) = -1 + 0j$ olduğu görülür.
 - Buradan negatif geri beslemeli sistemlerin gösteriminde, açı değerinin her zaman, $(\pm 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ şartını sağlaması gerektiği görülmektedir.
 - Pozitif geri beslemeli sistemlerde açı değeri, $1 - K \cdot G(s) = 0$ olduğundan dolayı, $K \cdot G(s) = 1 + 0j$ açı değeri $(\pm k \cdot 360^\circ, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ olmalıdır. Şimdilik sadece negatif geri beslemeler incelenecektir.
- Ayrıca, Kök Yer Eğrisi grafiği çizilirken, sıfırlar ve kutuplar, grafik üzerinde sırasıyla "o" ve "x" şeklinde gösterilir. Yönler her zaman kutuplardan, sıfırlara doğrudur. Başlangıçta, yani kutuplarda Kazanç değeri K , her zaman sıfıra eşittir. Sıfırlarda ise K değeri sonsuza gitmektedir.
- Kompleks düzlemde sanal eksenin sağ tarafı, her zaman kararsız ve sol tarafı ise tamamen kararlıdır.
- Negatif geri beslemeli sistemlerde, K kazanç katsayısı aralığı $(0 \leq K < \infty)$ ile tanımlıdır.
- Pozitif geri beslemeli sistemlerde ise K değeri, $(-\infty < K \leq 0)$ aralığında tanımlıdır.

Kök Yer Eğrilerinin Temel Özellikleri:

Kök yer eğrilerine ilişkin noktaları belirlemek için açı koşulu, kök yer eğrisi çizildikten sonra eğriye ilişkin K değerleri için genlik koşulu kullanılır.

Genlik Koşulu:

$-\infty < K < \infty$ için

$$M = |G(s)H(s)| = \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{1}{|K|} \quad |K| = \frac{\prod_{j=1}^n |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

Açı Koşulu:

$0 \leq K < \infty$ için Pozitif Kök Yer (PKE) eğrisi ($i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

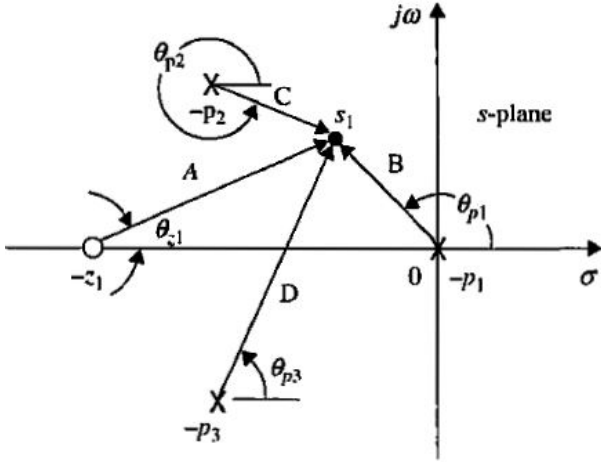
$$\theta = \angle G(s)H(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s + z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = (2i + 1) \cdot 180^\circ$$

$-\infty < K \leq 0$ için Negatif Kök Yer (NKE) eğrisi ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\theta = \angle G(s)H(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s + z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 2i \cdot 180^\circ$$

Kök yer eğrisi çizildikten sonra eğriye ilişkin K değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

Aşağıda verilen şekilde, $G(s)H(s)$ 'in kutup ve sıfırları keyfi olarak yerleştirilmiş olsun. Buna göre kök eğrisi üzerindeki herhangi bir s_1 noktası ele alalım ve $G(s)H(s)$ 'in kutup ve sıfırlardan bu noktaya vektörler çizelim. Kök yer eğrisi çizimi için,



$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)}$$

PKE için:

$$\angle(s_1 + z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3)$$

$$\angle G(s)H(s) = \theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = 2(i+1) \cdot 180^\circ$$

NKE için:

$$\angle(s_1 + z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3)$$

$$\angle G(s)H(s) = \theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = 2i \cdot 180^\circ$$

K genliği için:

$$|K| = \frac{|s_1| |s_1 + p_2| |s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \frac{BCD}{A}$$

1 + K·G(s)·H(s) = 0 için Kök Yer Eğrisi Özellikleri ve Çizimi:

1. **Başlangıç ve bitiş noktaları:** $K=0$ ve $K=\pm\infty$ noktaları

$K = 0$ noktalan $G(s)H(s)$ 'in kutuplarına karşı düşer, bunlara $s = \infty$ 'da bulunanlar dahildir.

$K = \pm \infty$ noktalan $G(s)H(s)$ 'in sıfırlarına karşı düşer, bunlara $s = \infty$ 'da bulunanlar dahildir.

2. **Kök Eğrilerinde Kol Sayısı**

Kök yer eğrisinin bağımsız kol sayısı $F(s)=0$ denkleminin mertebesine eşittir. Kol sayısı kutup sayısı " n " kadardır. Sıfır sayısı " m " ile ifade edildiğinde sonsuza giden kol sayısı $(n-m)$ kadardır.

3. **Kök Eğrilerinde Simetri**

Kök yer eğrisi $G(s)H(s)$ 'nin kutup sıfır yerleşimindeki simetri eksenlerine göre simetriktir.

4. **Kök Eğrilerinde Asimptot Sayısı**

Kutup sayısı " n ", sıfır sayısı " m " ile ifade edilirse $|n-m|-1$ kadardır.

5. **Asimptot Açılıarı**

Kutup sayısı sıfır sayısından büyükse, kollar sonsuza gider ve asimptotlara paralel olur. Asimptotların gerçek eksen ile yaptığı açı: $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\text{PKE (K>0) için: } \theta_i = \frac{2(i+1)}{|n-m|} \cdot 180^\circ \quad \text{NKE (K<0) için: } \theta_i = \frac{2i}{|n-m|} \cdot 180^\circ$$

6. Asimptotların Kesişme Noktası

Asimptotlar s -düzleminde gerçekte eksen üzerinde kesişir.

Gerçekte eksen üzerindeki yeri:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n - m}$$

7. Gerçekte Eksendeki Kök Eğrileri

Gerçekte eksen üzerinde bir kısmın PKE ($K > 0$) olması için sağda bulunan tüm gerçekte kutup ve sıfırların toplamı tek sayıda olmalıdır. Eğer çift ise kısım NKE'ye ($K < 0$) ilişkindir.

8. Kök Eğrilerinin Çıkış ve Giriş Açıları

$i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ve $0 \leq K < \infty$, Pozitif Kök Yer (PKE) eğrisi için

$$\theta = \angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{k=1}^m \angle(s_1 + z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s_1 + p_j) = (2i + 1) \cdot 180^\circ$$

$-\infty < K \leq 0$ için Negatif Kök Yer (NKE) eğrisi ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\theta = \angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{k=1}^m \angle(s_1 + z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s_1 + p_j) = 2i \cdot 180^\circ$$

9. Kök Eğrilerinin Sanal Ekseni Kesme Noktaları

Kök eğrisinin sanal ekseni kesme noktaları ve bu noktalara ilişkin K değerleri Routh-Hurwitz kriteri uygulanarak bulunur.

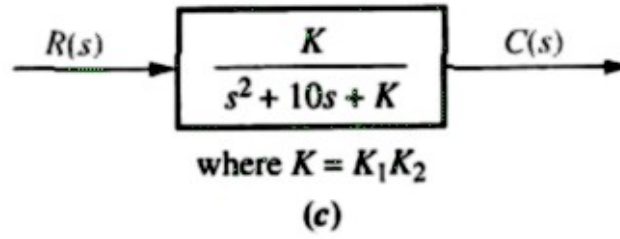
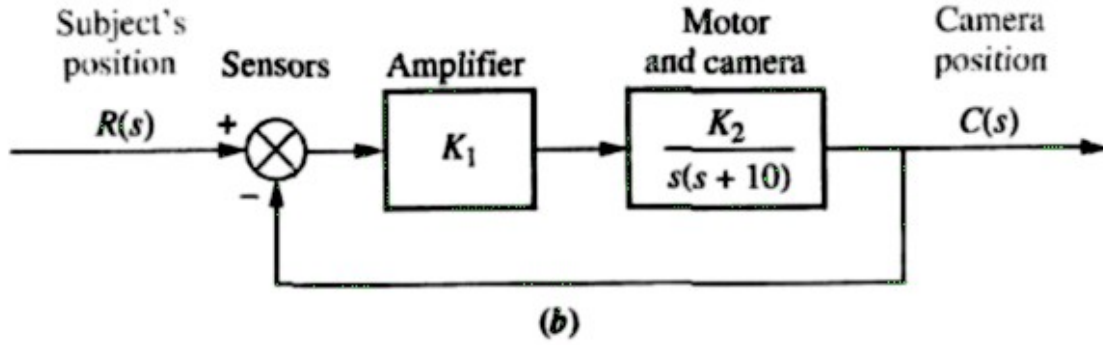
10. Kök Eğrilerinde Kopma Noktaları

Kök eğrisinin kopma noktaları $dK/ds=0$ yada $G(s)H(s)/ds=0$ denklem köklerinden belirlenir.

11. Kök Eğrisi üzerindeki s_1 gibi herhangi bir noktaya ilişkin K değeri

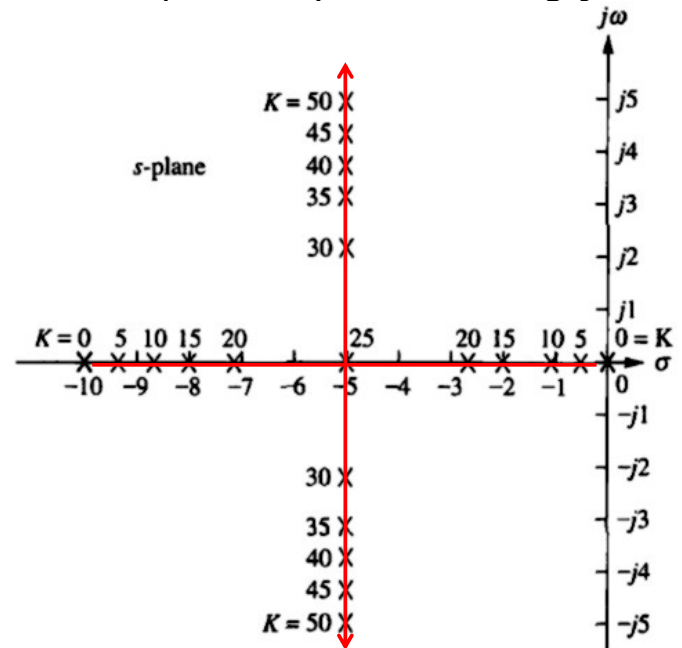
$$|K| = 1 / |G(s_1)H(s_1)|$$

Örnek: Aşağıda hareket eden nesnelere takip eden bir güvenlik kamera kapalı çevrim otomatik kontrol sisteminin blok diyagramı verilmiştir. Kapalı çevrim kazancının sistemin geçici rejim yanıtına ve kararlılığına etkisini inceleyiniz.



Çözüm: Sistemin kazancı değiştirildiğinde kutuplarının yerlerinin değişimi:

K	Pole 1	Pole 2
0	-10	0
5	-9.47	-0.53
10	-8.87	-1.13
15	-8.16	-1.84
20	-7.24	-2.76
25	-5	-5
30	-5 + j2.24	-5 - j2.24
35	-5 + j3.16	-5 - j3.16
40	-5 + j3.87	-5 - j3.87
45	-5 + j4.47	-5 - j4.47
50	-5 + j5	-5 - j5

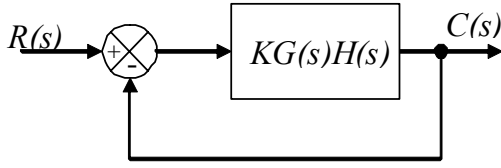


İşte bu kapalı çevrim kutupların kazançla bağlı değişimi kök yer eğrisidir. Kazanç 25 den küçük olduğunda bütün kutuplar reeldir. Bu geçici rejim yanıtı için sistemin aşırı sönümlü olduğunu gösterir. Kazanç 25 ise kritik sönümlü, 25'den büyük olduğunda ise sönümlü olduğunu gösterir.

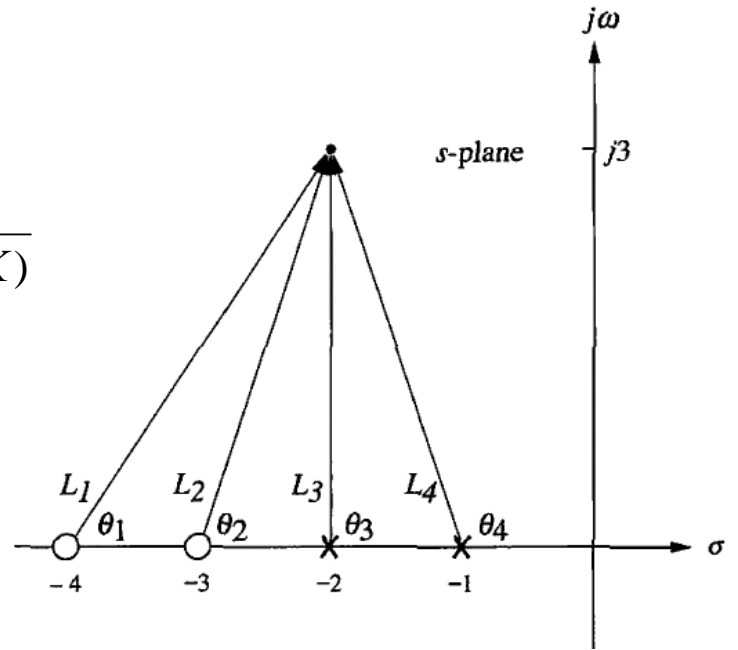
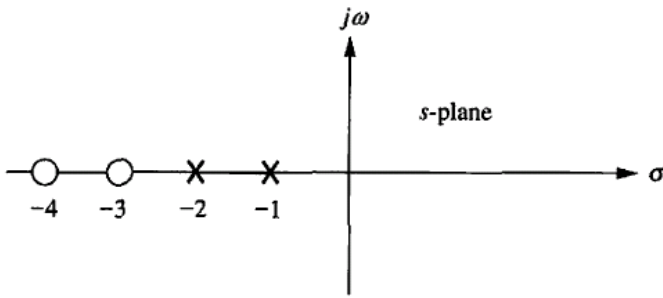
Örnek: Aşağıda açık çevrim transfer fonksiyonu verilen kontrol sisteminin kök yer eğrisini elde ediniz.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Çözüm: Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu:



$$T(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2 + (3+7K)s + (2+12K)}$$



-2+j3 kutbu için açılar:

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 56.31^\circ + 71.57^\circ - 90^\circ - 108.43^\circ = -70.55^\circ$$

-2+j3 kutbu kök yer eğrisi üzerinde değildir! Herhangi bir kazanç değeri için kapalı çevrim kutbu değildir.

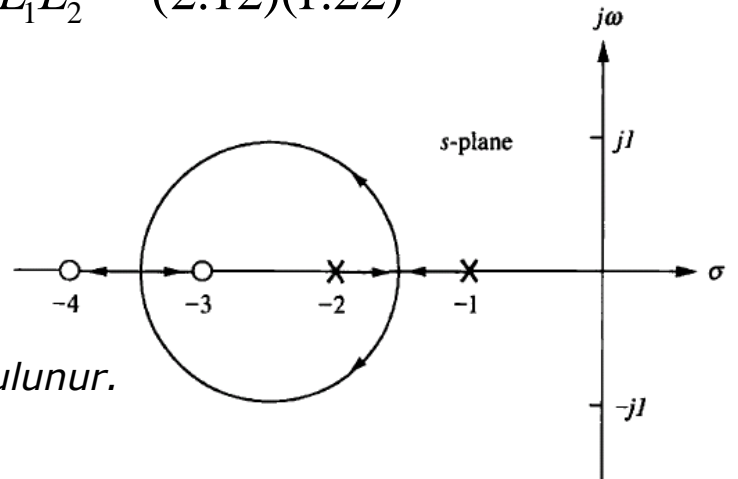
-2+j(√2/2) kutbu için işlemleri tekrarlırsak K değeri:

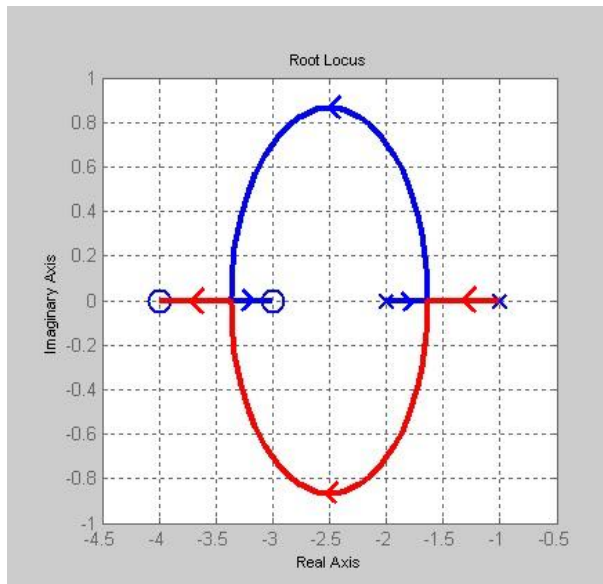
$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{L_3 L_4}{L_1 L_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (1.22)}{(2.12)(1.22)} = 0.33$$

$$\frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)} = -1$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Buradan kopma/ayrılma noktaları bulunur.





$$dK/d\sigma = -4\sigma^2 - 20\sigma - 22 = 0$$

$$\sigma_1 = -3.366$$

$$\sigma_2 = -1.634$$

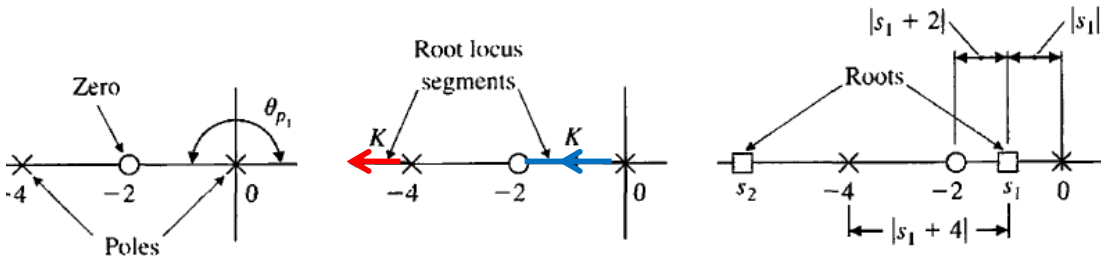
Örnek:

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K(\frac{1}{2}s + 1)}{\frac{1}{4}s^2 + s} = 0.$$

$$1 + K \frac{2(s + 2)}{s^2 + 4s} = 0,$$

$$P(s) = \frac{2(s + 2)}{s^2 + 4s}.$$

$$1 + K \frac{2(s + 2)}{s(s + 4)} = 0,$$



$$\frac{(2K)|s_1 + 2|}{|s_1||s_1 + 4|} = 1 \quad K = \frac{|-1||-1 + 4|}{2|-1 + 2|} = \frac{3}{2}.$$

s_1 'deki kazanç değeri.

Asimptotların kesişme noktası:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{poles of } P(s) - \sum \text{zeros of } P(s)}{n - M} = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n - M}.$$

Asimptot açıları:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_A &= \frac{2k + 1}{n - M} 180^\circ, & k &= 0, 1, 2, \dots, (n - M - 1), \\ (n - M)\phi &= 180^\circ, \\ \phi &= \frac{180^\circ}{n - M}. \end{aligned} \right.$$

Örnek: Aşağıda açık çevrim transfer fonksiyonu verilen kontrol sisteminin kök yer eğrisini elde ediniz.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s \cdot (s+1)(s^2 + 8 \cdot s + 32)}$$

$n_p - n_z = 4 - 1 = 3$ Asimptot var.

...

$$\frac{K(s+2)}{s \cdot (s+1)(s^2 + 8s + 32)} = -1$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Buradan kopma/ayrılma noktaları bulunur.

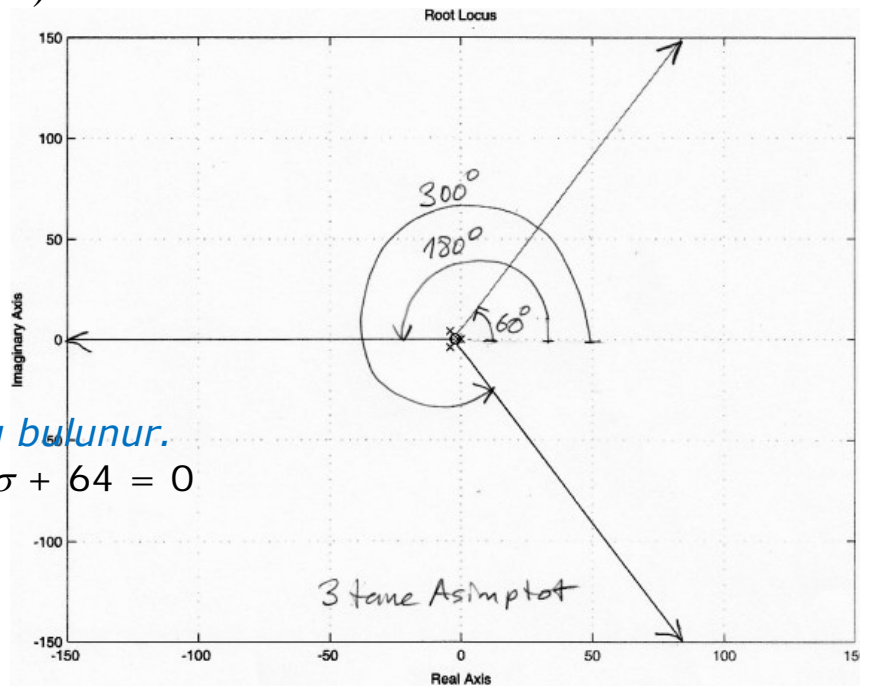
$$dK/d\sigma = 3\sigma^2 - 26\sigma^2 + 94\sigma^2 - 160\sigma + 64 = 0$$

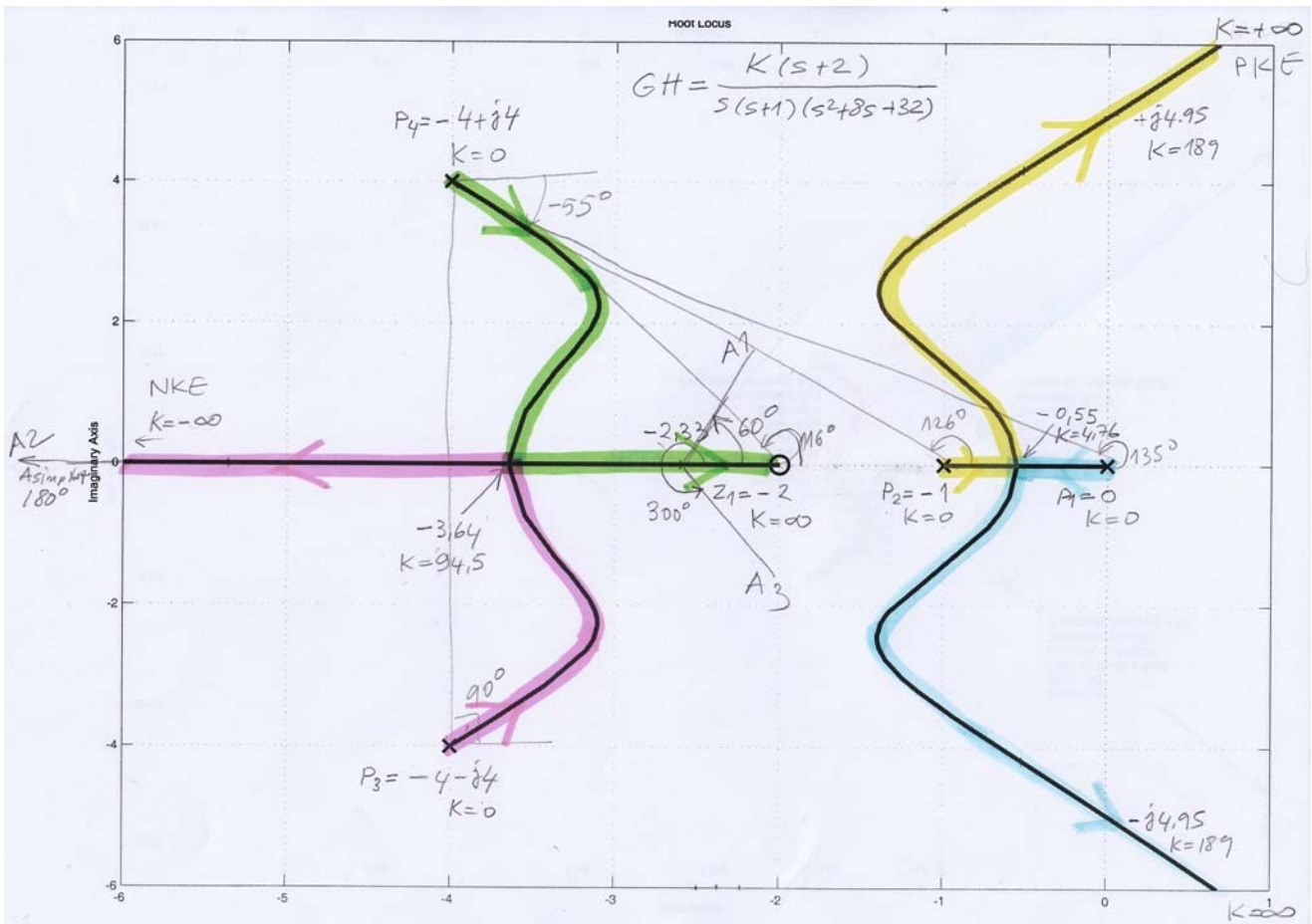
$$\sigma_1 = -3.643$$

$$\sigma_2 = -2.234 + j2.358$$

$$\sigma_3 = -2.234 - j2.358$$

$$\sigma_4 = -0.555$$





Kaynaklar

1. Otomatik Kontrol Sistemleri, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999.
2. Automatic Control Systems, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley, 2010.
3. Modern Control Systems, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Prentice Hall, 2011.
4. Control System Engineering, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.
5. Modern Control Engineering, K. OGATA, Prentice-Hall, 1997.
6. Feedback and Control Systems, Joseph J. Distefano, Allen R. Stubberrud, Ivan J. Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.
7. Ders Notları için İnternet Adresi: <http://www.tuncayuzun.com/>,
<http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/>