

EHM3132 Gr.1

Otomatik Kontrol

Bölüm 7

Frekans Yanıtı Yöntemleri

Bode Diyagramı Yöntemi

Bode Diyagramı Yöntemi

Kontrol sistemlerin analizi ve tasarımında dört farklı yöntem kullanılmaktadır. Bunlar:

- 1. Kök Yer Eğrisi (Root-Locus) grafik yöntemi,*
- 2. Bode diyagramı*
- 3. Nyquist kriteri*
- 4. Nicholas-chart diyagramı*

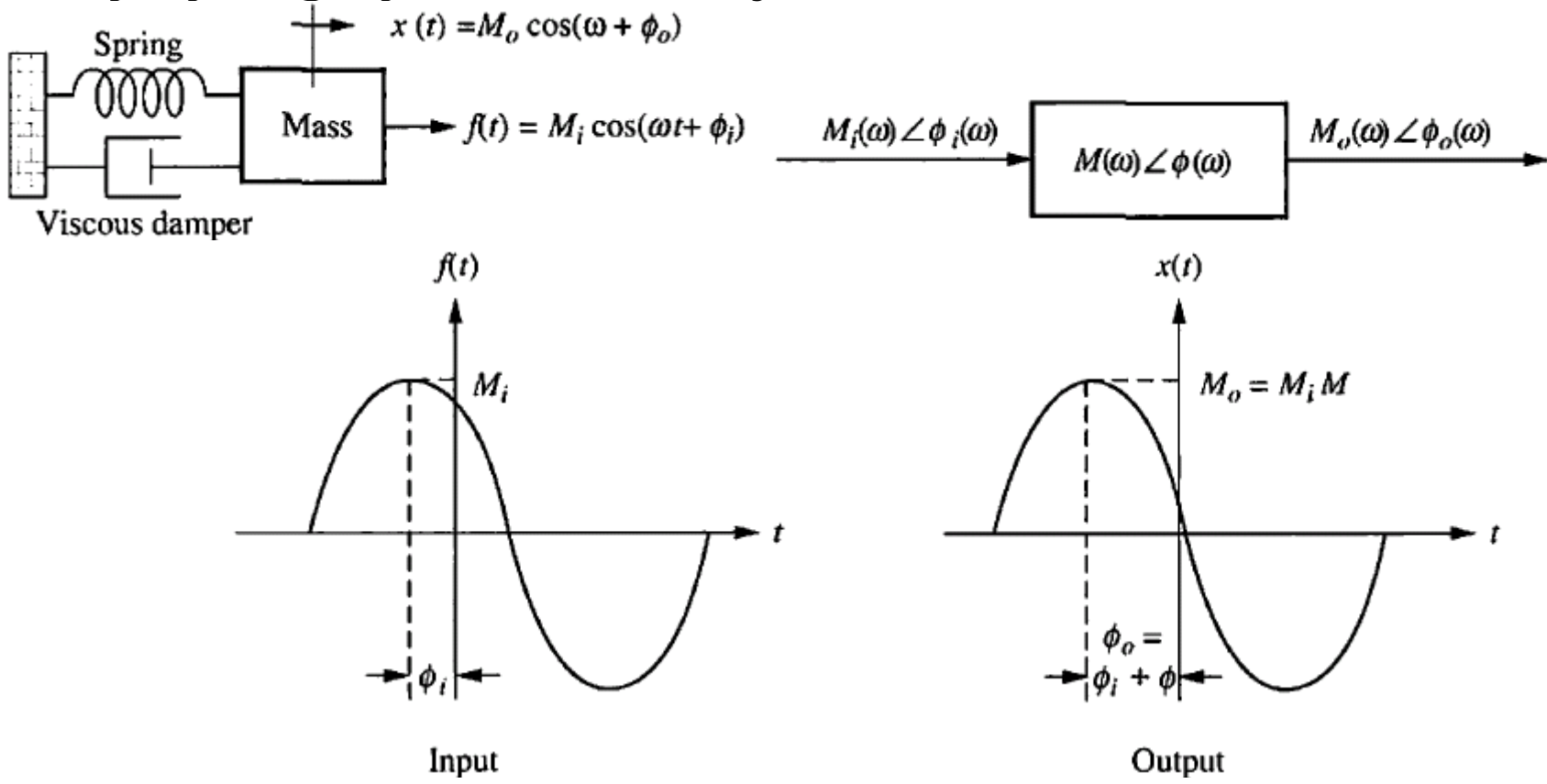
Frekans yanıtı yöntemleri ilk olarak Nyquist ve Bode tarafından 1930'lu yıllarda ortaya atılmış, 1948'de Evans tarafından geliştirilmiştir (Nyquist 1932, Bode 1945).

Bode Diyagramı:

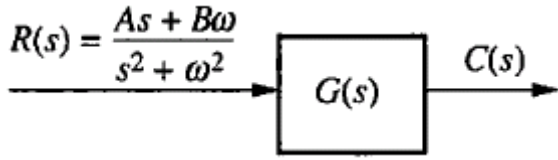
- Fiziksel veriden transfer fonksiyonunun modellenmesini sağlar.*
 - İleri kompanzasyon tasarımının kalıcı-hal hatası gereğini ve geçici rejim yanıtını sağlar.*
 - Lineer olmayan sistemlerin kararlılığını bulunmasını sağlar.*
- Kök yer eğrisi çizimindeki belirsizliklerin çözümünü sağlar.*
- Analitik ifadesi Nilsson tarafından 1990 yılında elde edilmiştir.*

Kararlı halde, doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin girişine sinüzoidal işaret uygulanırsa, sistem aynı frekansta bir sinüzoidal yanıt verir. Bu yanıtlar giriş ile aynı frekansta olsalar da, genliği ve faz açısı girişten farklıdır. Bu farklar frekansın bir fonksiyonudur.

Aşağıda mekanik bir sistem, transfer fonksiyonu ve sinüzoidal frekans yanıtı, giriş ve çıkış dalga şekilleri verilmiştir.



Aşağıda bir sistemin transfer fonksiyonu ve frekans yanıtı şekilleri verilmiştir.



$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos[\omega t - \tan^{-1}(B/A)]$$

Bu Fazörü 3 değişik biçimde gösterebiliriz.

- 1) Kutupsal, $M_i \angle \phi_i$
- 2) Kartezyen, $A - jB$
- 3) Euler formülü, $M_i e^{j\phi_i}$

$$C(s) = \frac{As + B\omega}{(s^2 + \omega^2)} G(s)$$

$$C(s) = \frac{As + B\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} G(s)$$

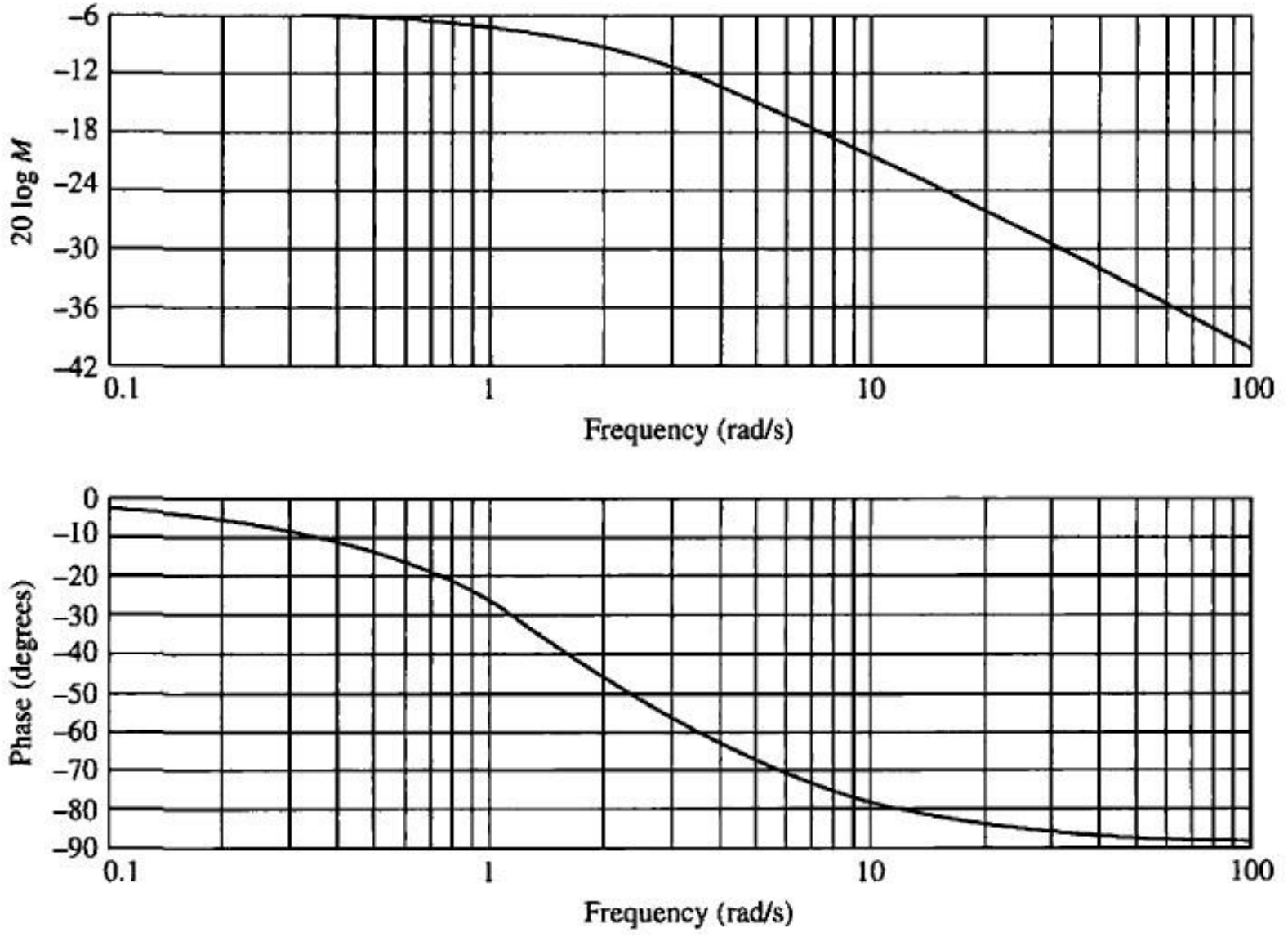
$$= \frac{K_1}{s + j\omega} + \frac{K_2}{s - j\omega} + G(s)\text{'in kısmi kesirli terimleri}$$

$$G(j\omega) = G(s)|_{s \rightarrow j\omega}$$

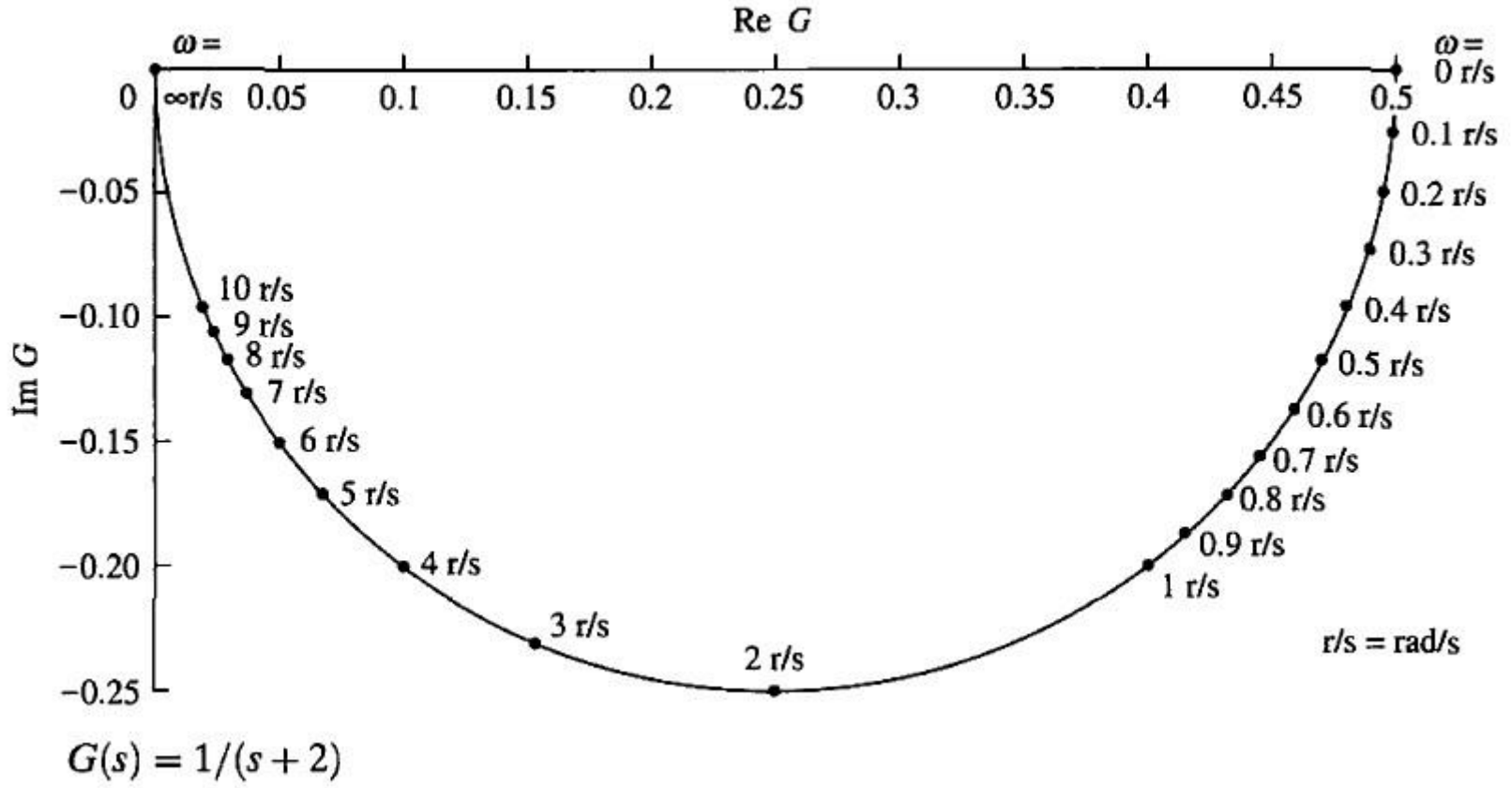
Örnek: Aşağıda transfer fonksiyonu verilen kontrol sisteminin Bode diyagramını elde ediniz.

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)}$$

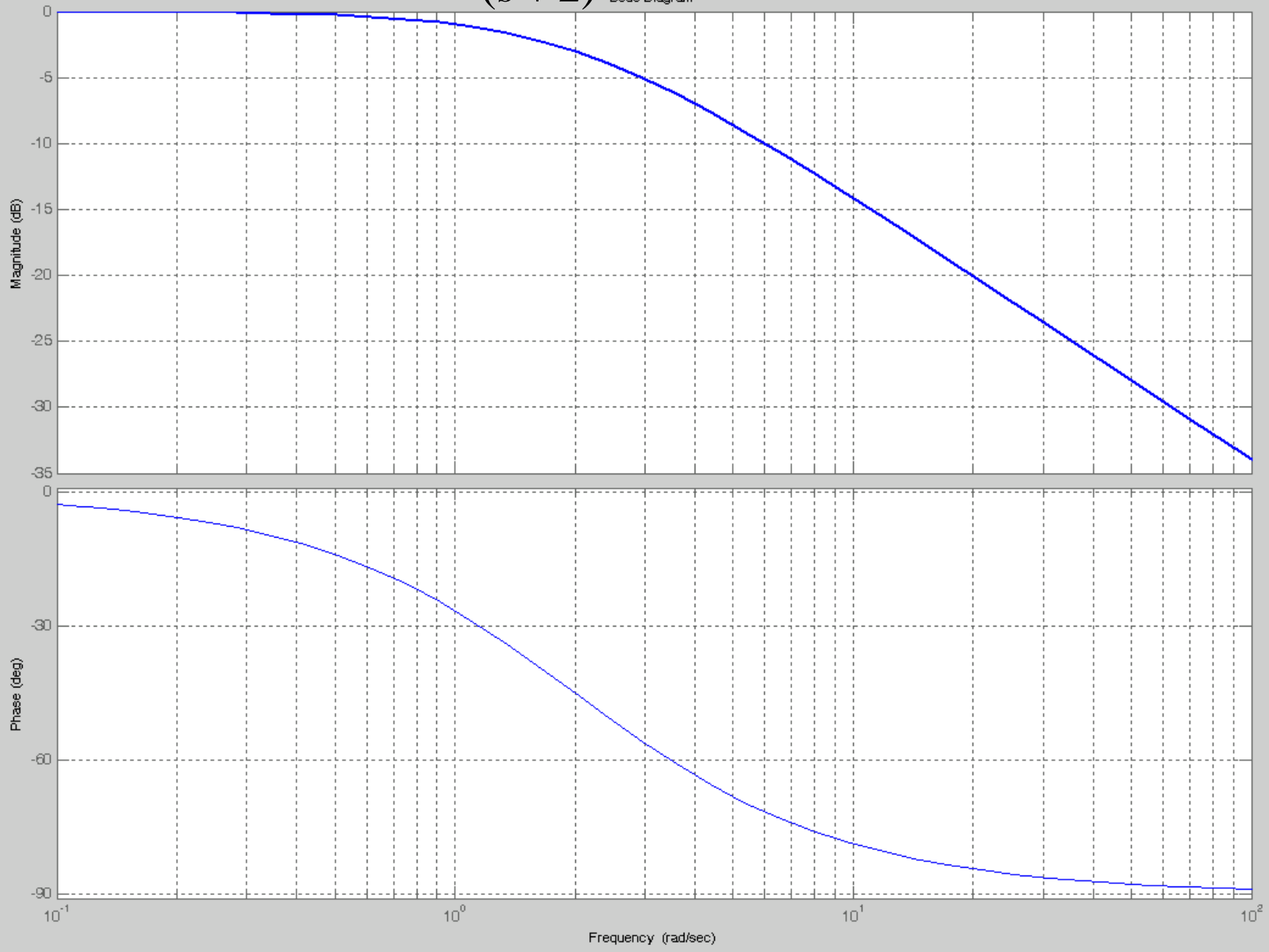
Çözüm:



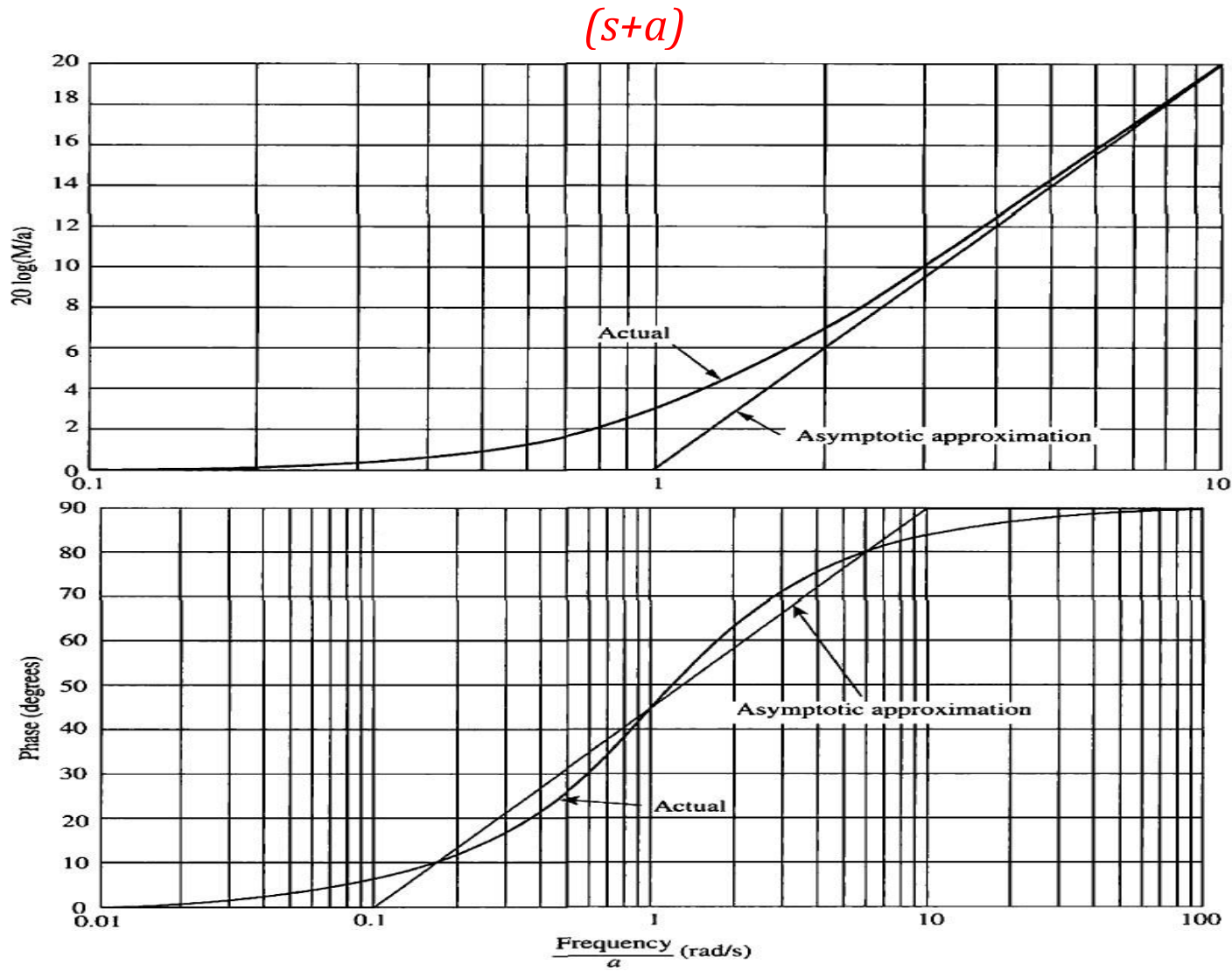
Kutupsal çizim:

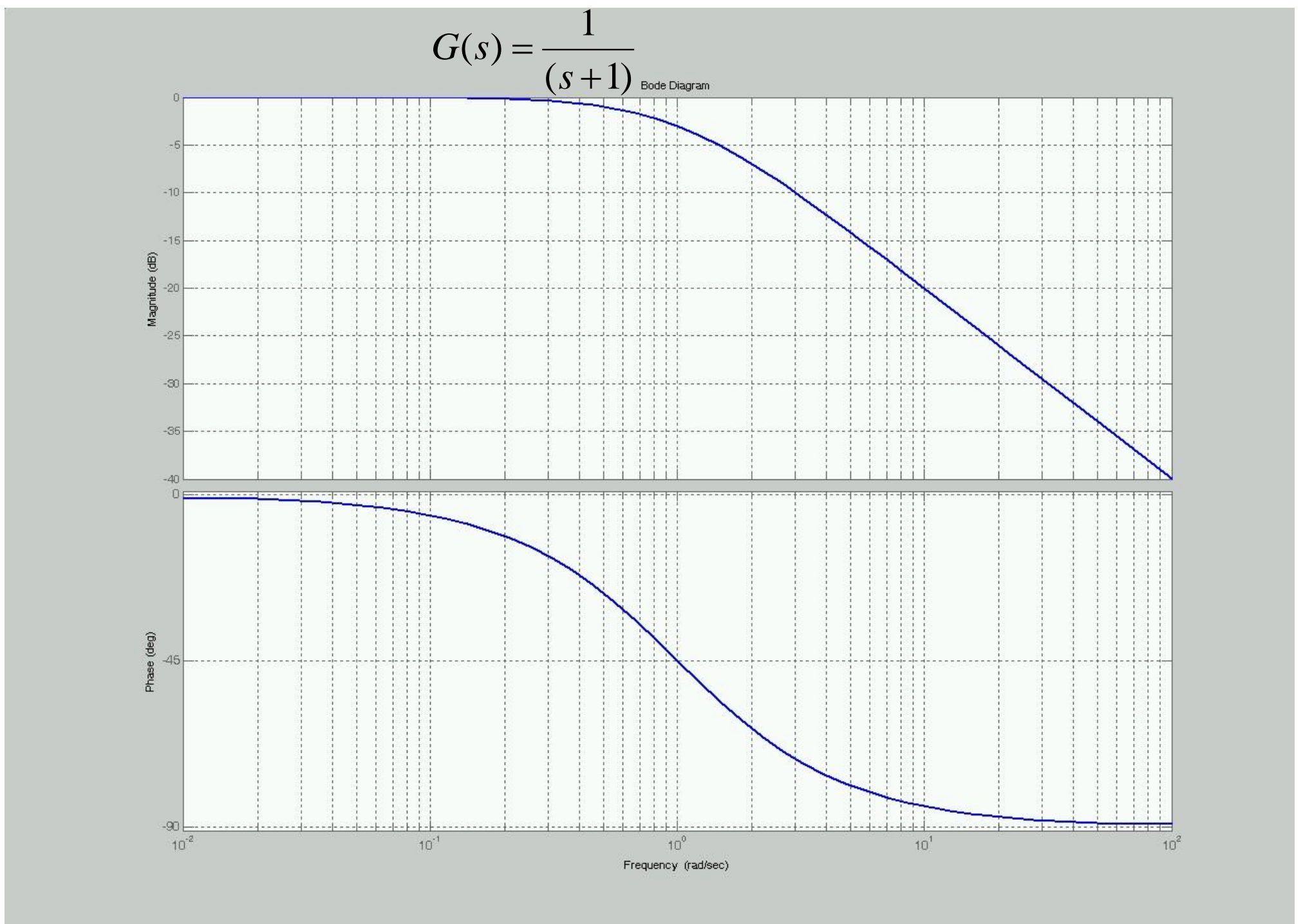
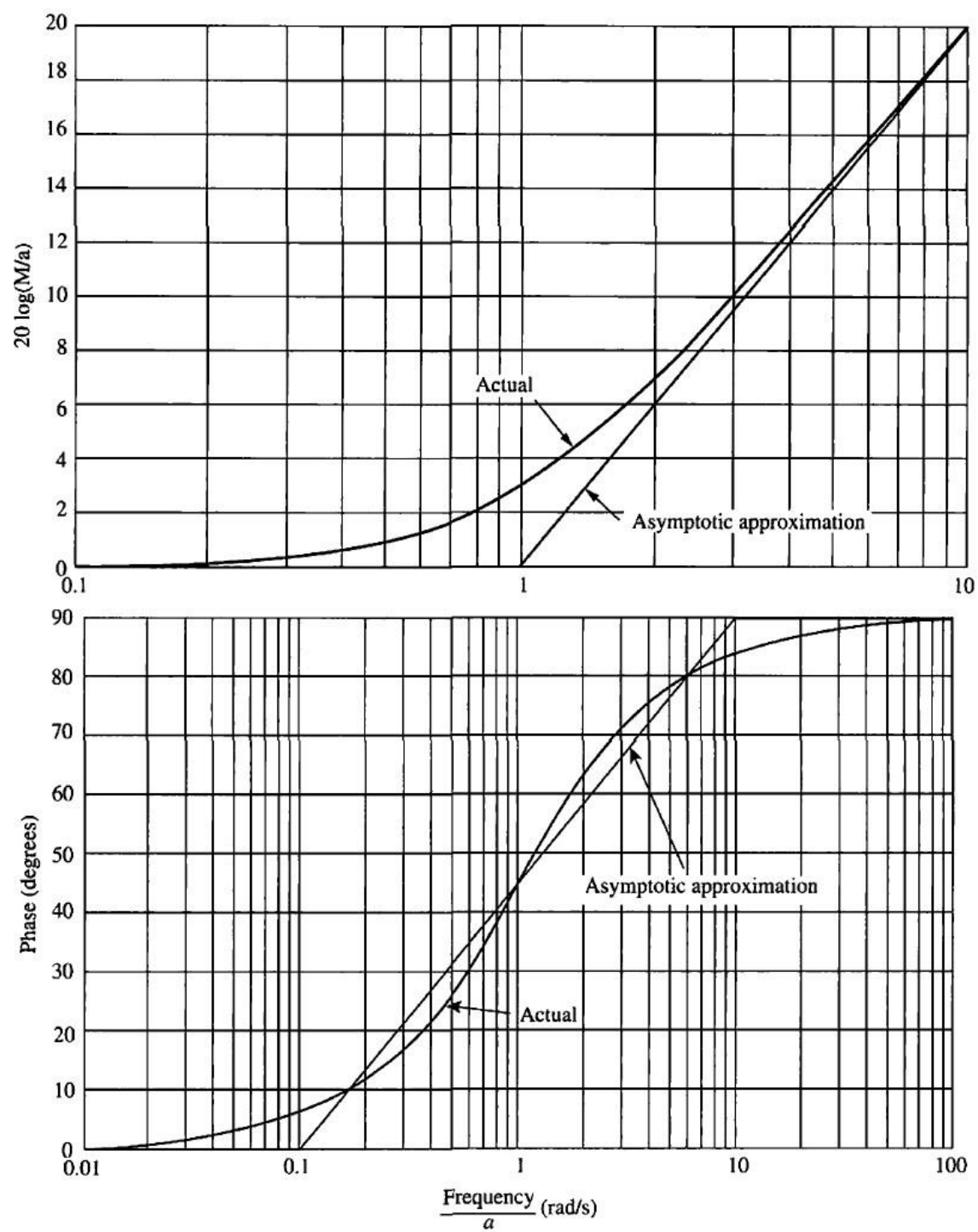


$$G(s) = \frac{2}{(s+2)}$$

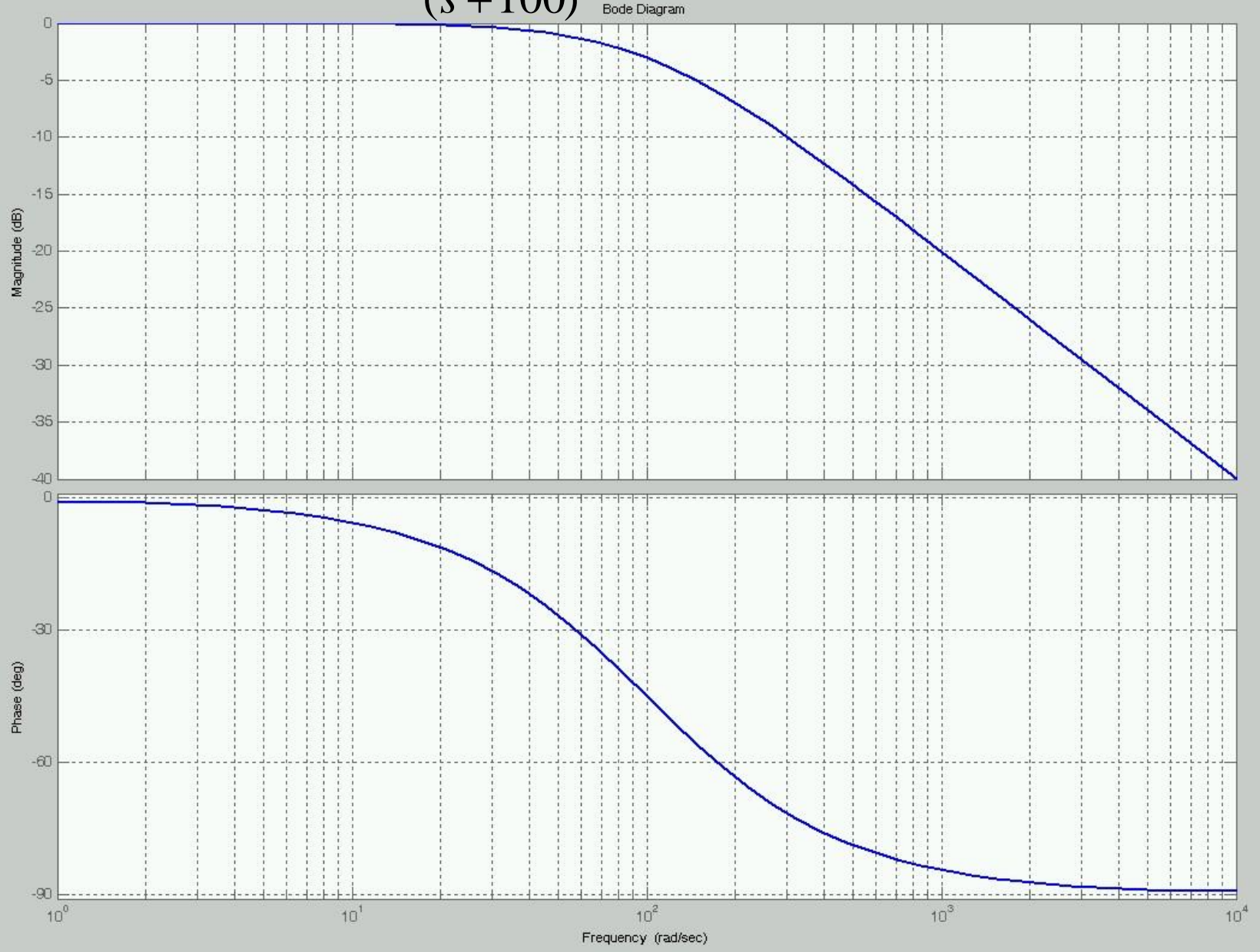


Asimptotik yaklaşım:

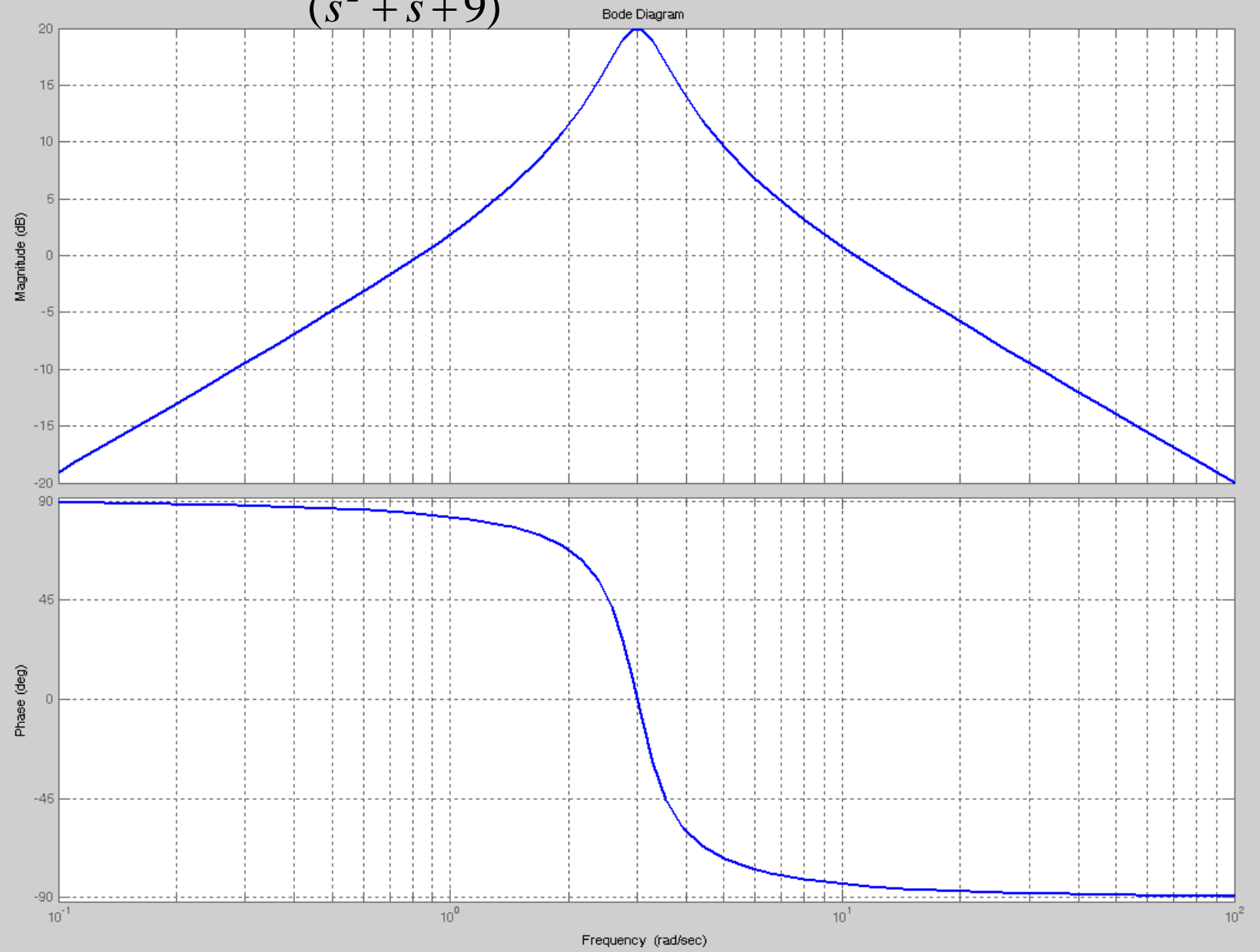




$$G(s) = \frac{100}{(s + 100)}$$



$$G(s) = \frac{10s}{(s^2 + s + 9)}$$



İkinci derece sistemlerin Bode Diyagramının Çizimi

$G(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$ transfer fonksiyonunun Bode Diyagramının Çizimi:

Birinci derece sistemlerin aksine ikinci derece sistemlerde ζ 'nin bazı değerleri için gerçek frekans cevabı ile asimptotik yaklaşım frekans yanıtı arasındaki fark büyük olabilir.

Alçak frekanslarda:

$$G(s) \approx \omega_n^2 = \omega_n^2 \angle 0^\circ$$

$$20 \log M = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \omega_n^2$$

Yüksek frekanslarda:

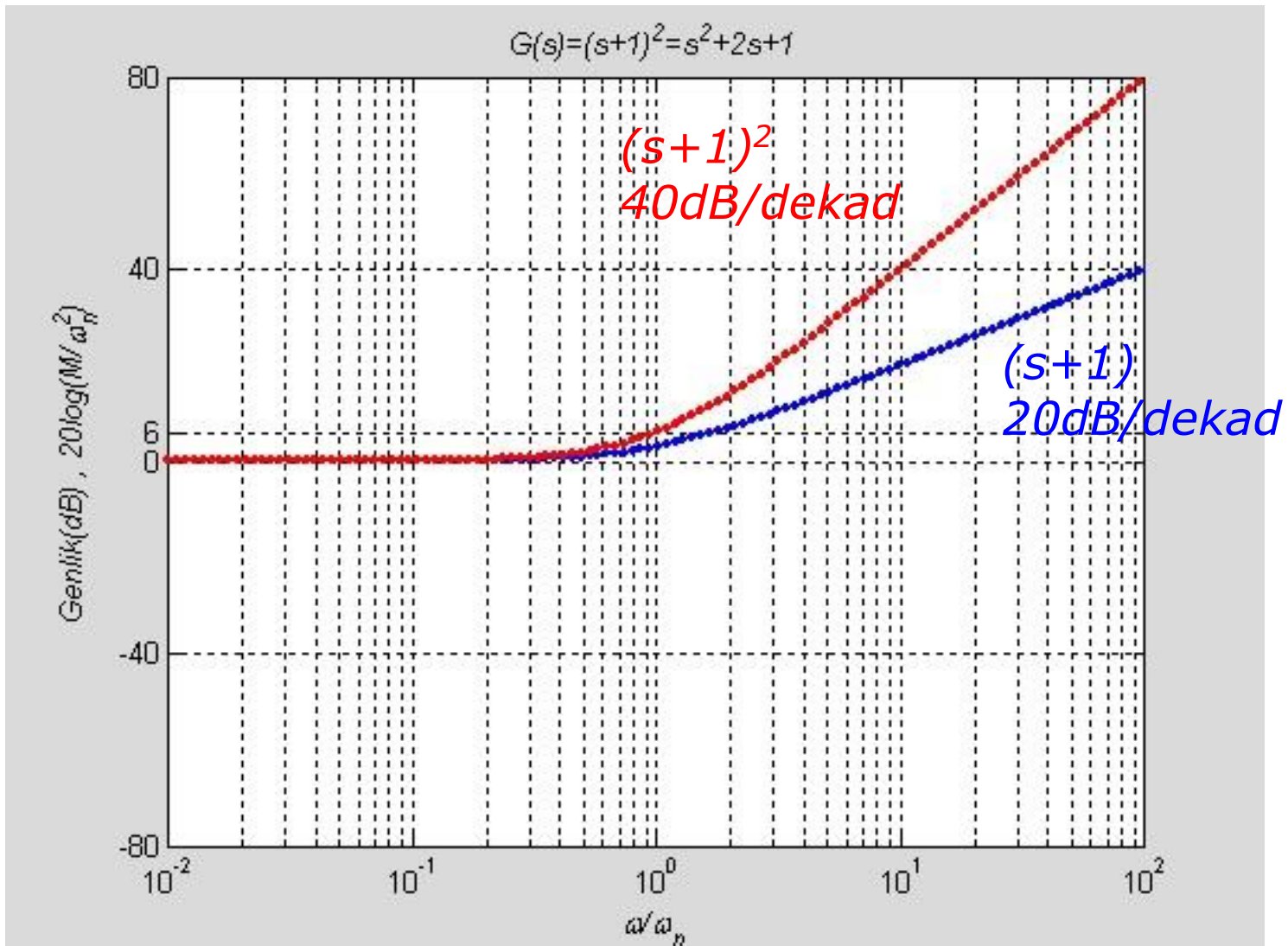
$$G(s) \approx s^2$$

$$G(j\omega) \approx -\omega^2 = \omega^2 \angle 180^\circ$$

$$20 \log M = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \omega^2 = 40 \log \omega$$

eğim 40dB/dekad olur.

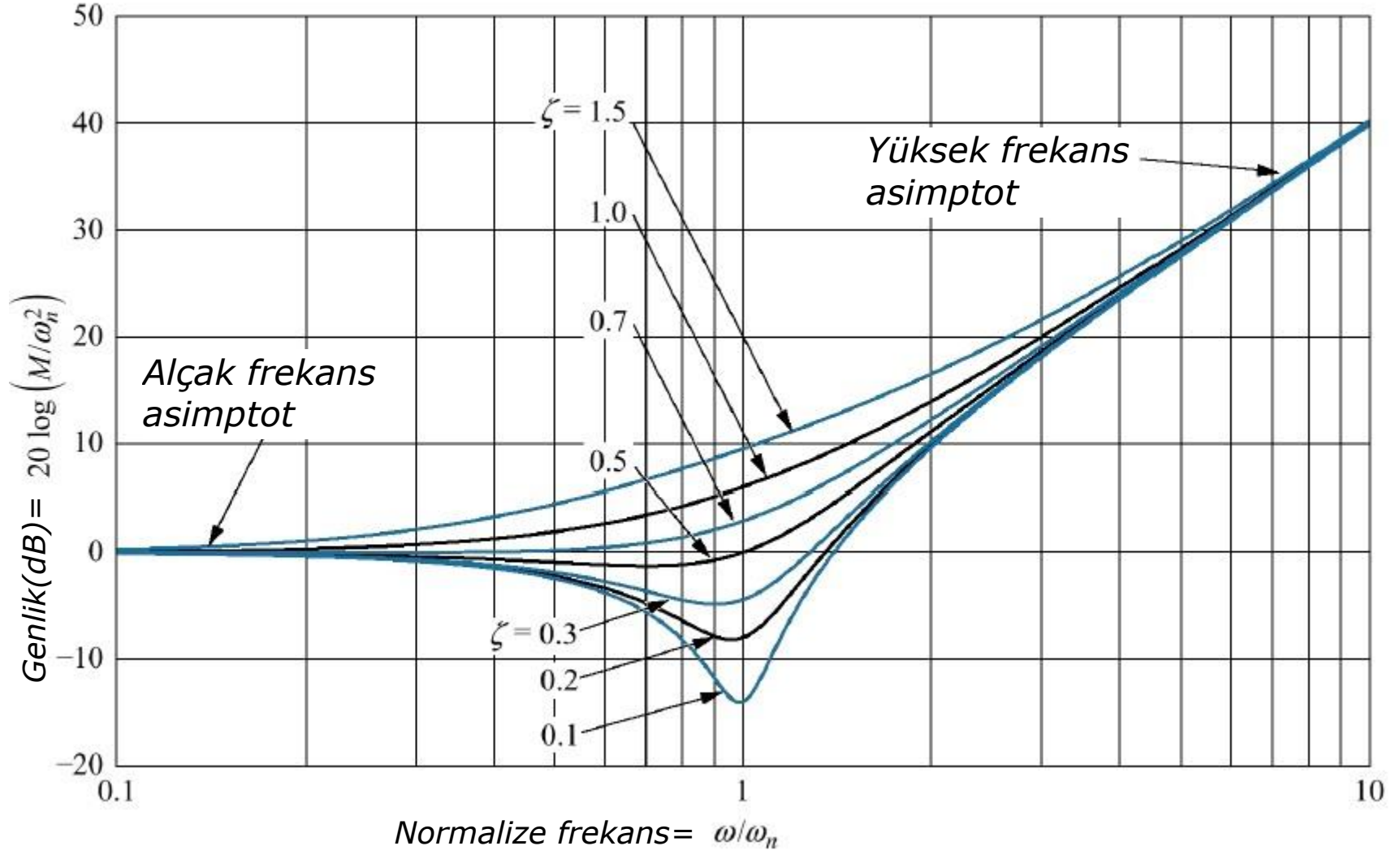
Dikkat edilecek olursa $\omega=\omega_n$ için alçak ve yüksek frekans asimptotları aynı olur ve ω_n ikinci derece sistemin köşe frekansıdır



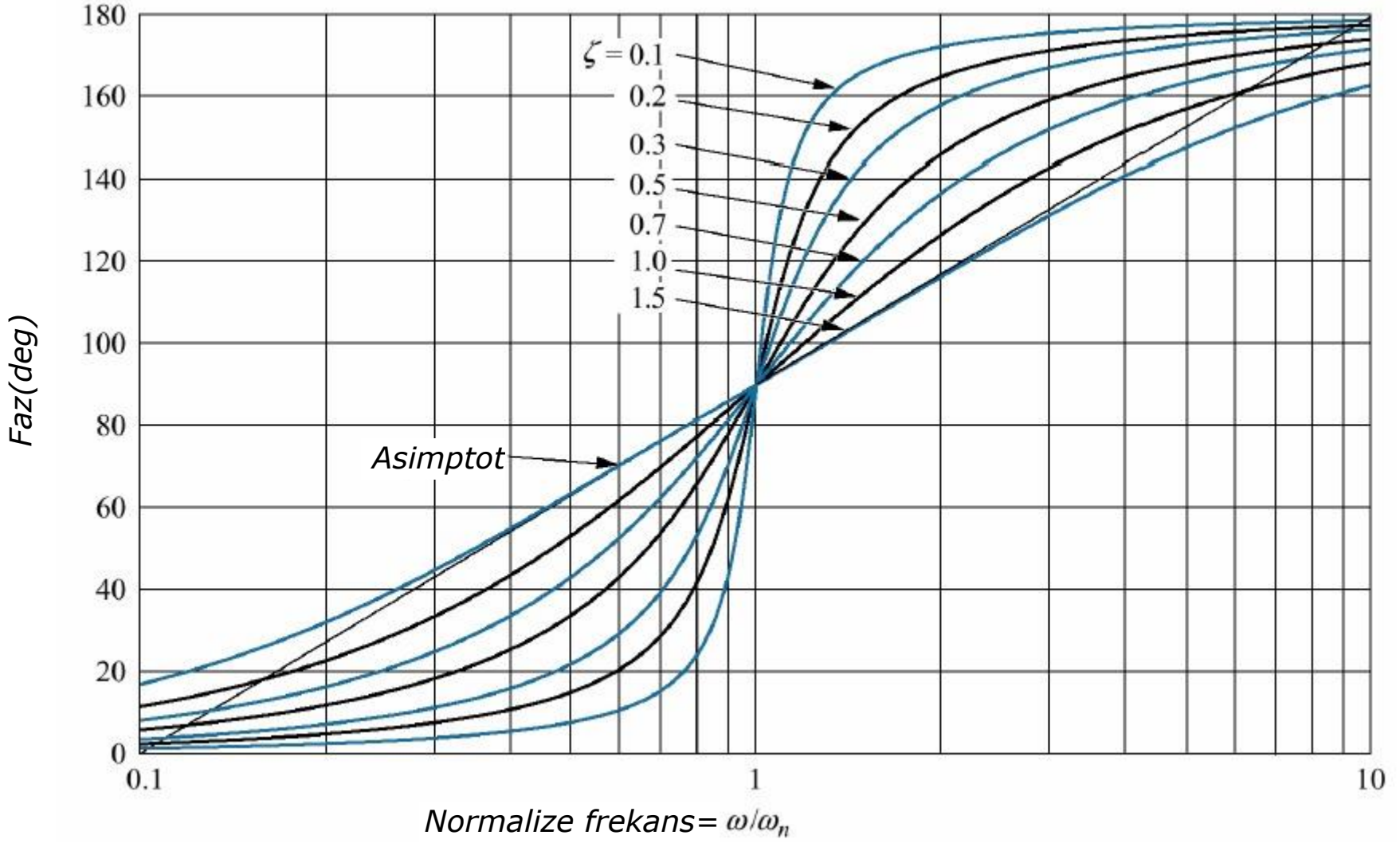
$$G(j\omega) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \Big|_{s \rightarrow j\omega} = (\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n \omega$$

$\omega=\omega_n$ için $G(s)=j2\zeta\omega_n^2$ olur. Açık ise sabit 90° olur.

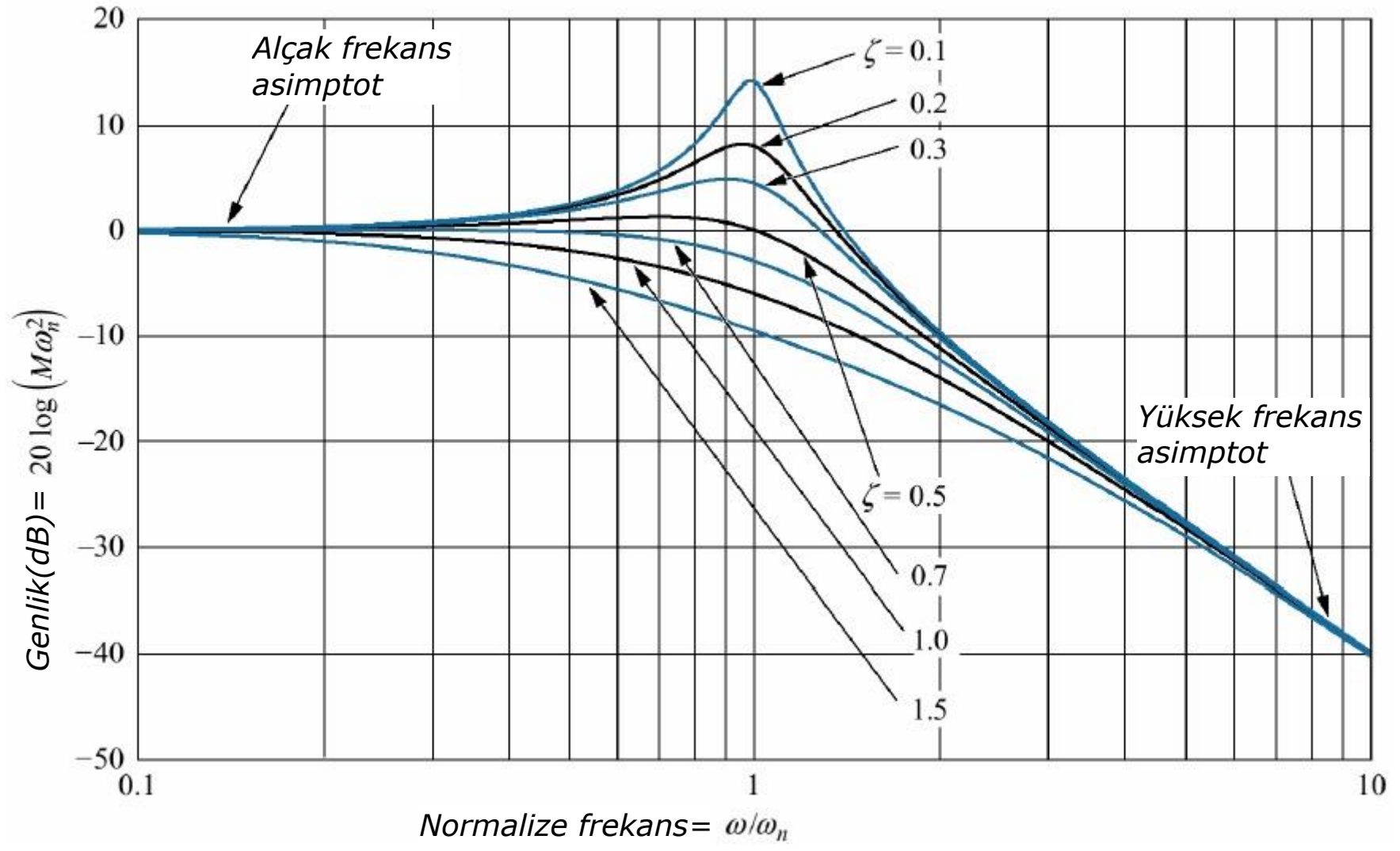
$G(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+ \omega_n^2$ için Genlik fonksiyonunda ζ etkisi



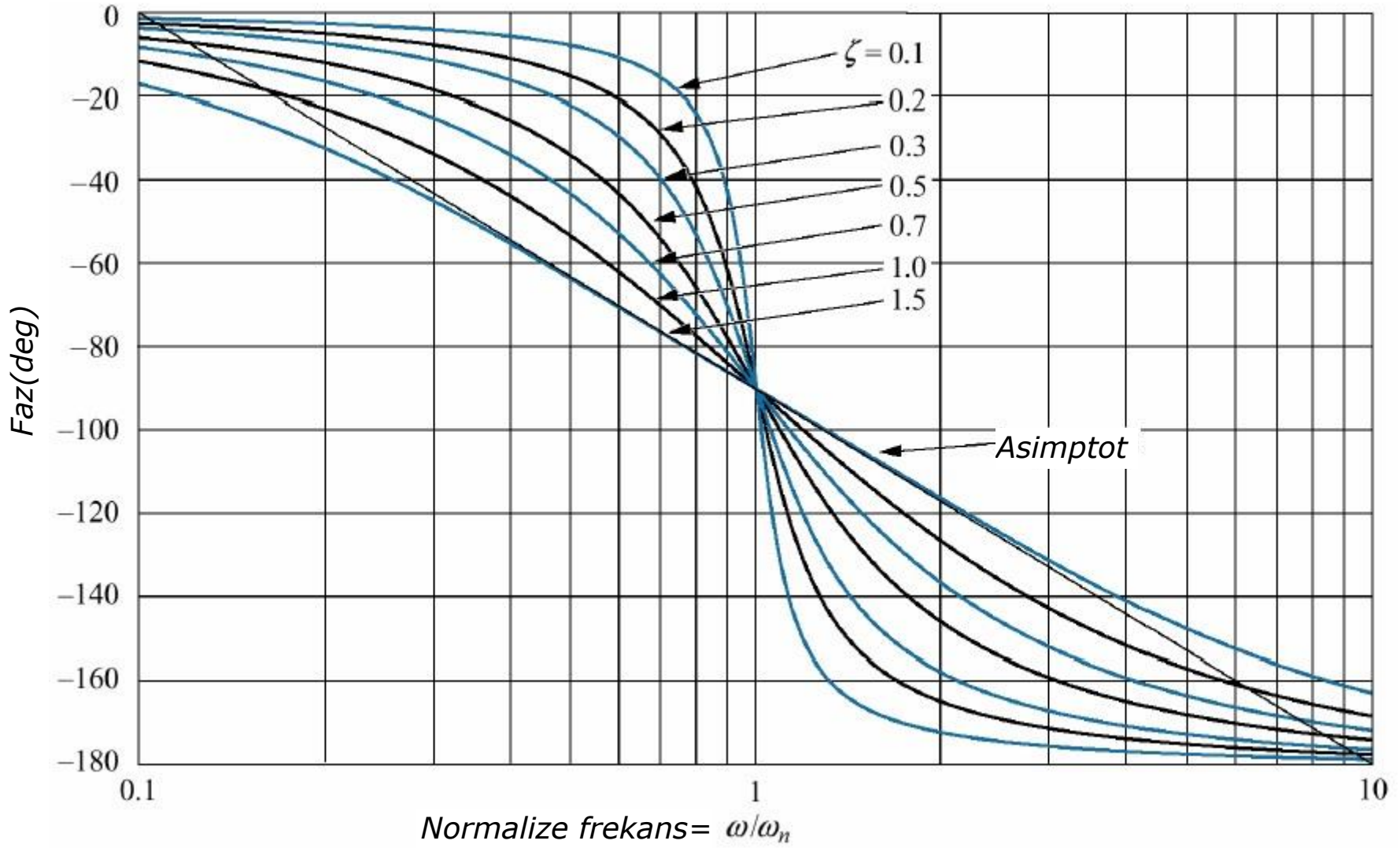
$G(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+ \omega_n^2$ için Faz fonksiyonunda ζ etkisi



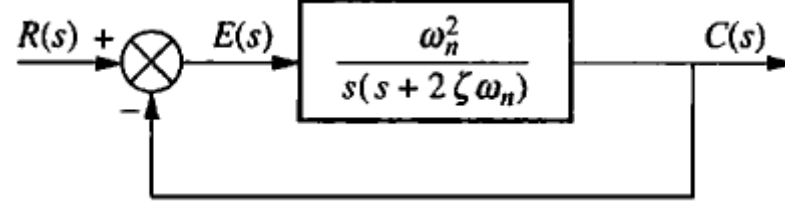
$G(s)=1/(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$ için Genlik fonksiyonunda ζ etkisi



$G(s)=1/(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$ için Faz fonksiyonunda ζ etkisi



Kapalı çevrim frekans yanıtı



$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

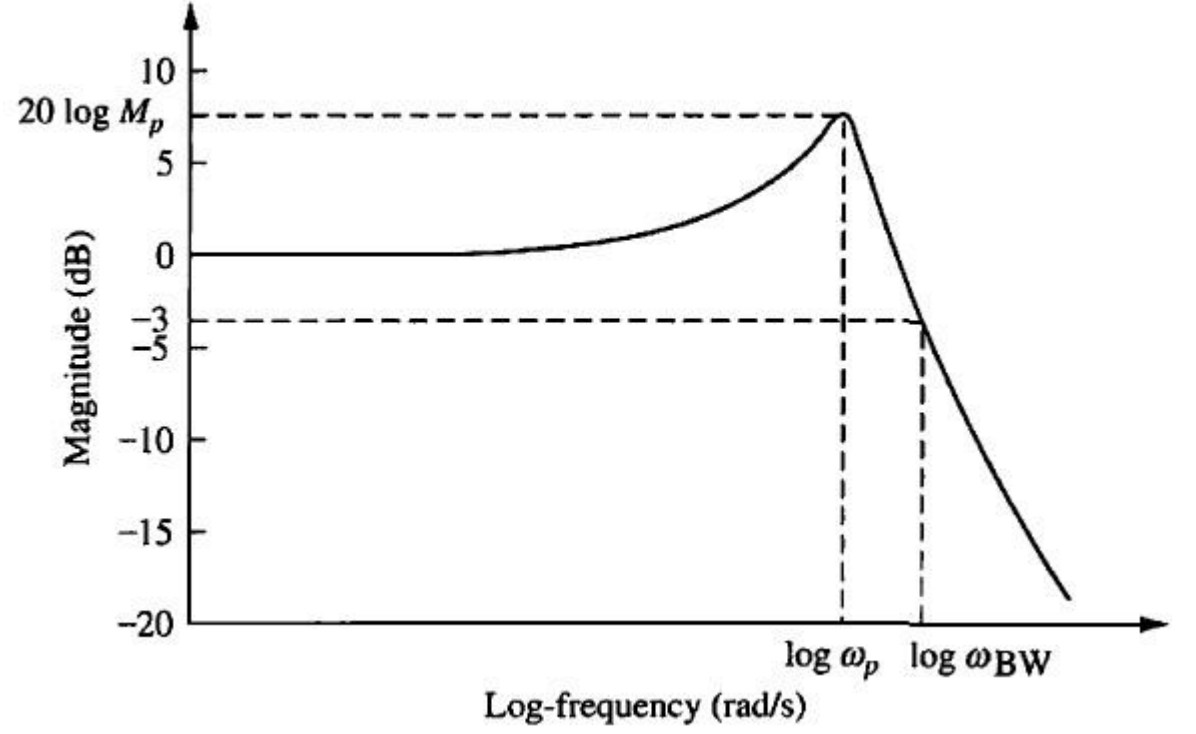
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$M = |T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}$$

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

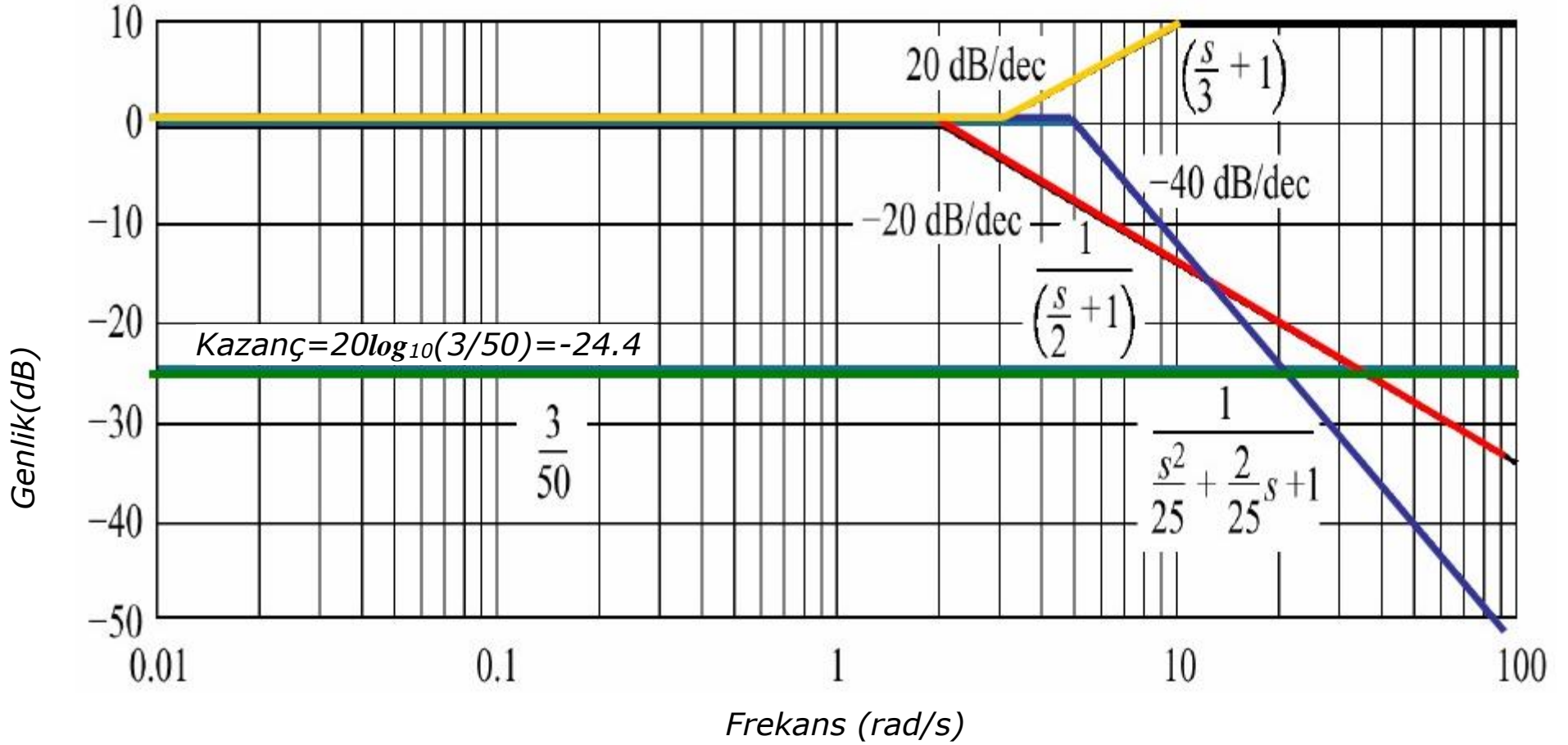
$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$



$G(s) = \frac{(s+3)}{(s+2)(s^2+2s+25)}$ için Genlik fonksiyonu

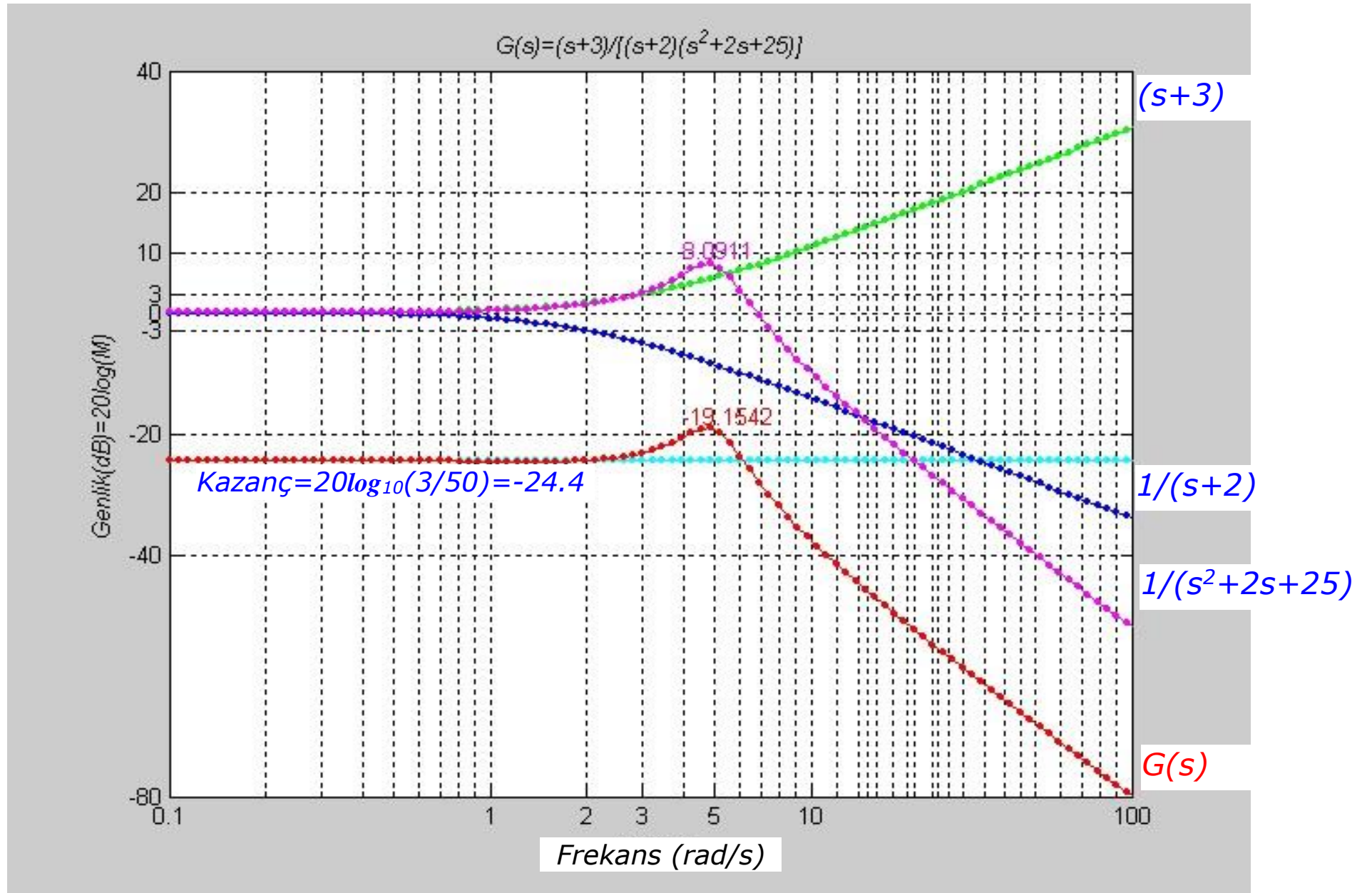
Asimptotik yaklaşım:



Katsayı eşleştirme yapılırsa: $s^2 + 2s + 25 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

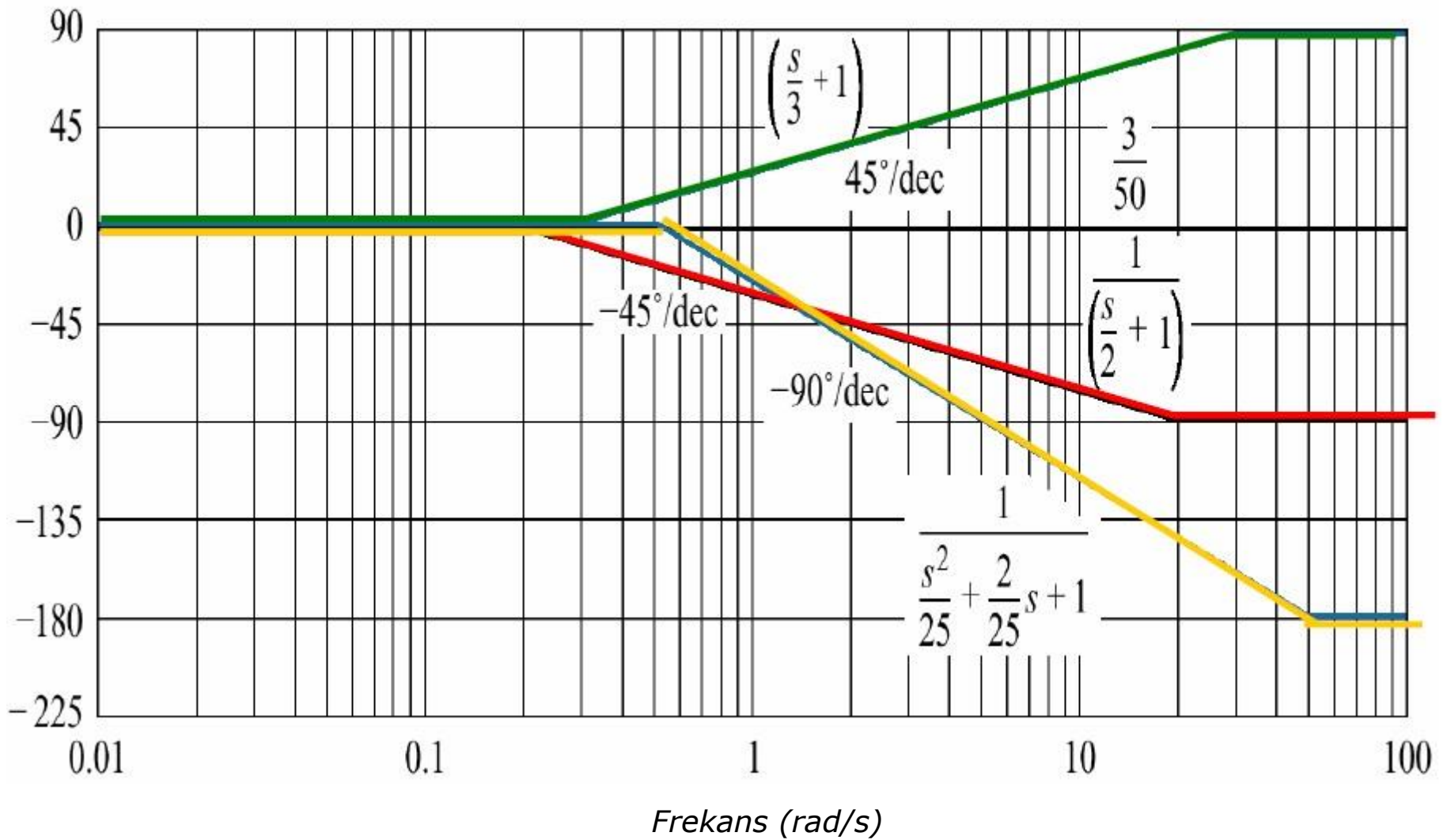
$\omega_n^2 = 25$ ise $\omega_n = 5$ olur. $2\zeta\omega_n = 2$ ise $\zeta = 0.2$ olur.

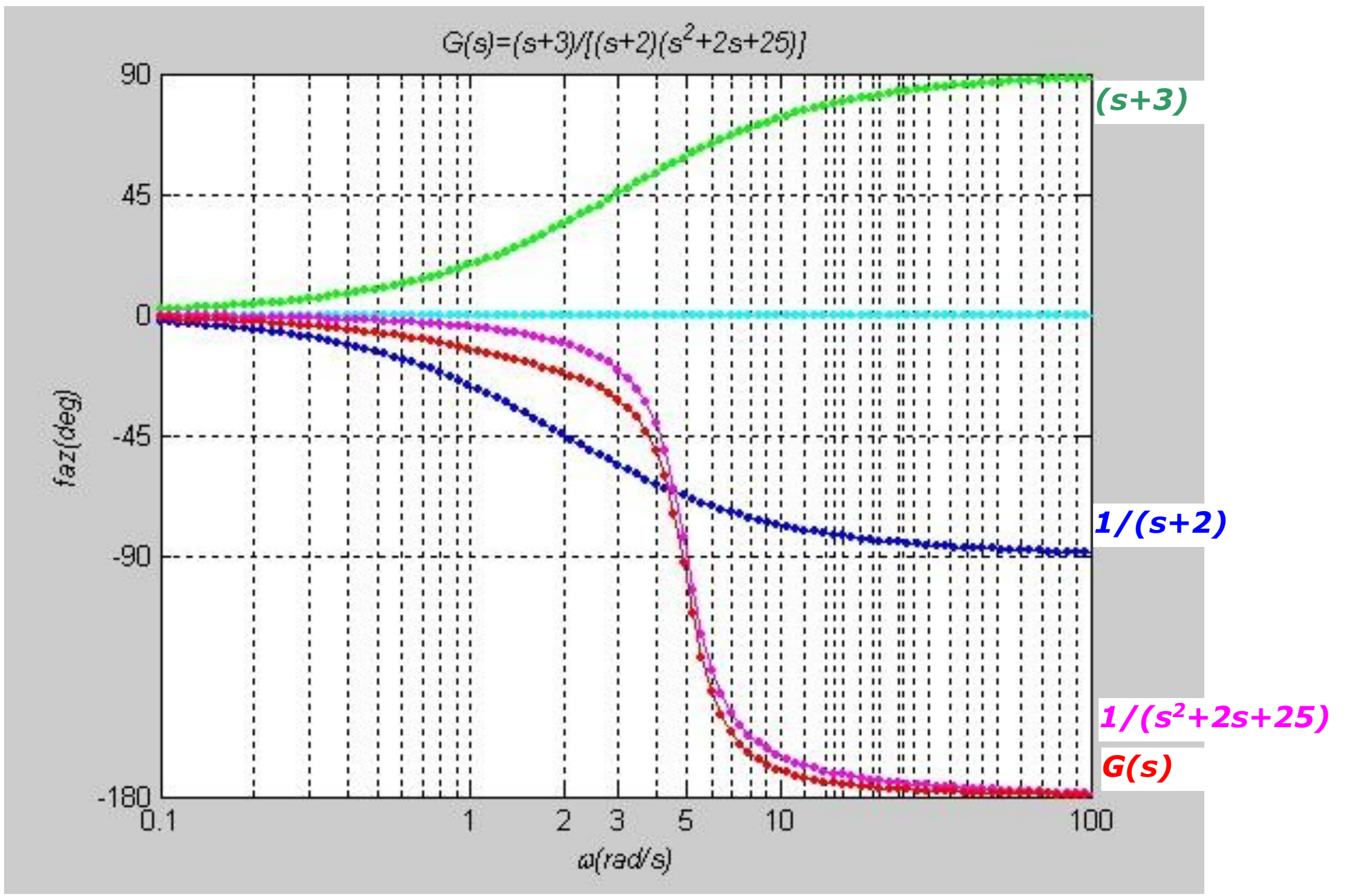
$\omega_p = 4.9$, $M_p = 8\text{dB}$ olarak hesaplanır.



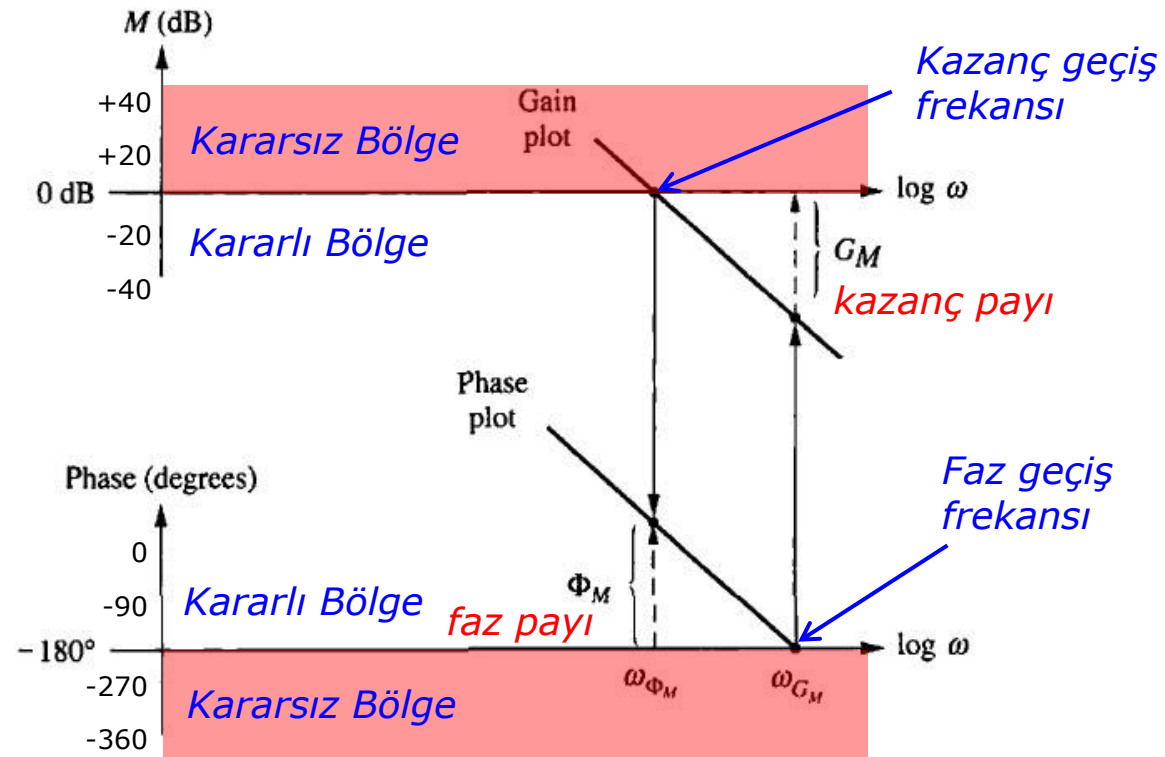
$G(s) = \frac{(s+3)}{(s+2)(s^2+2s+25)}$ için Faz fonksiyonu

Asimptotik yaklaşım:



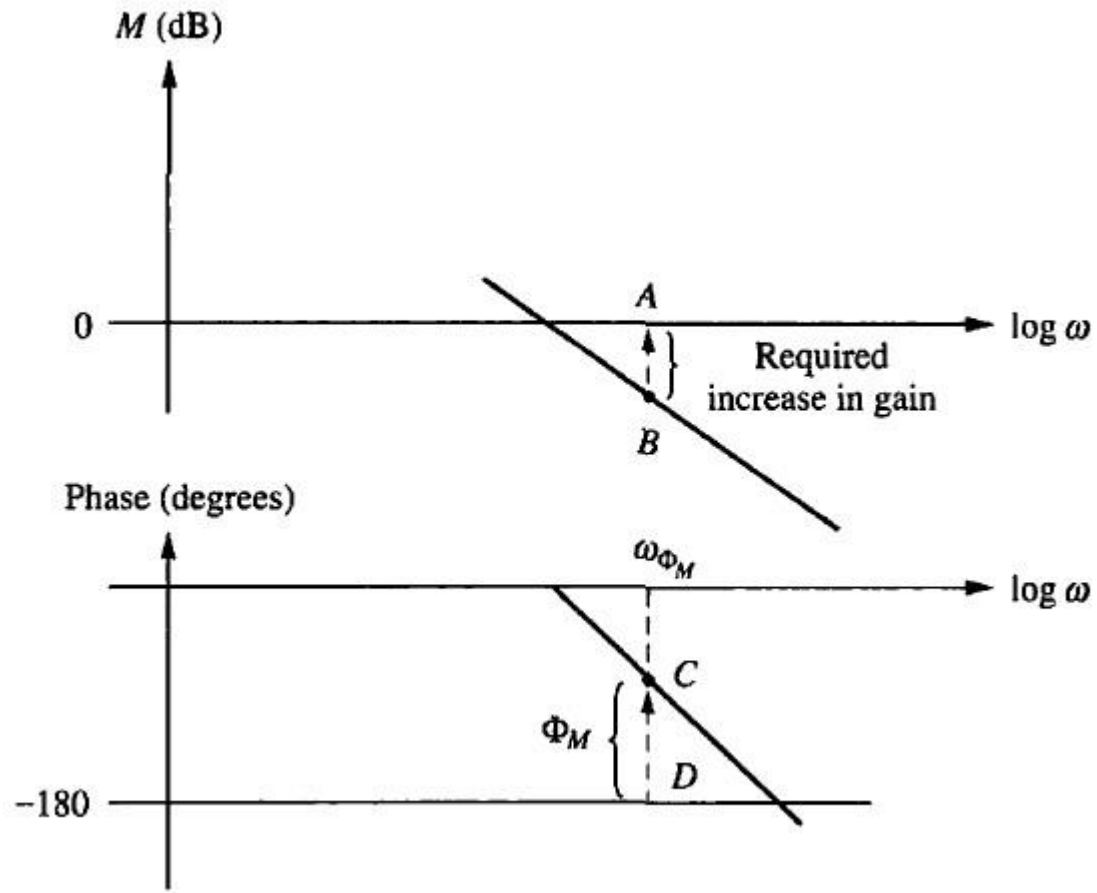


Bode Diyagramında Kazanç ve Faz Payı



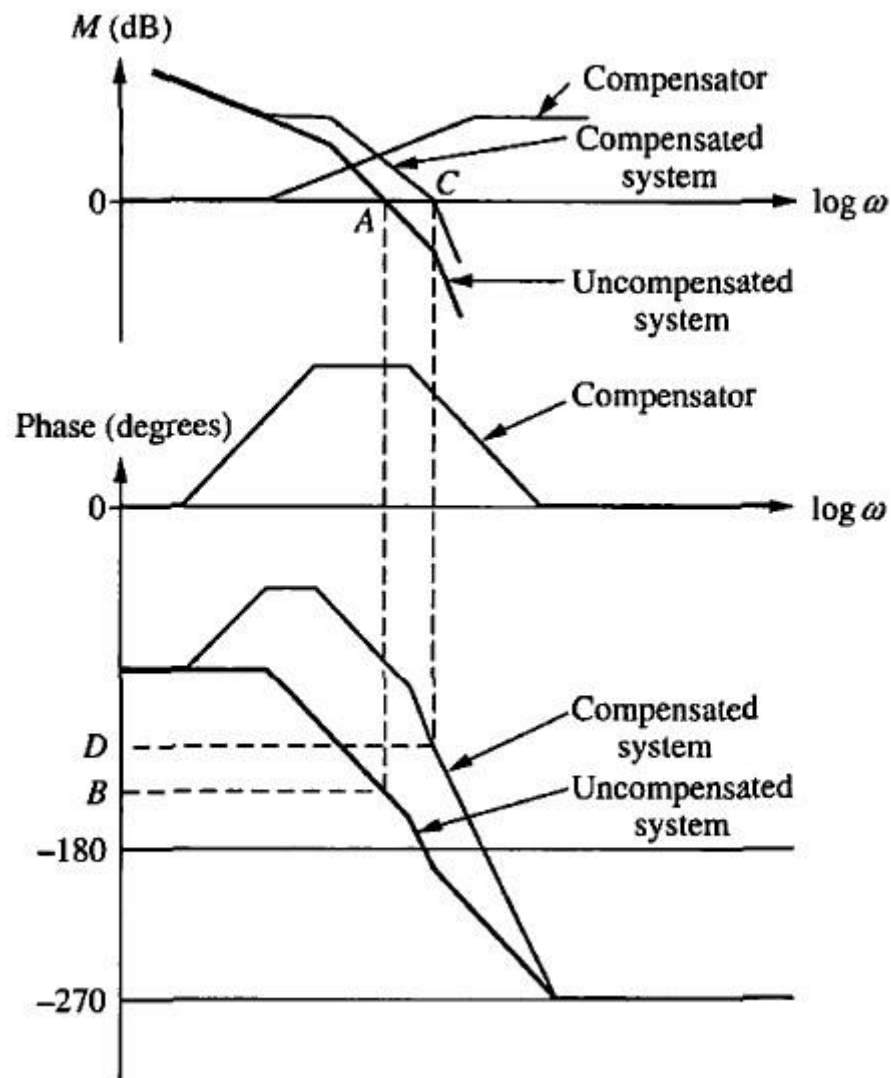
Kazanç ve Faz payının Bode diyagramı üzerinde belirlenmesi

İstenen Faz Payı için Bode Diyagramında Kazanç Ayarı



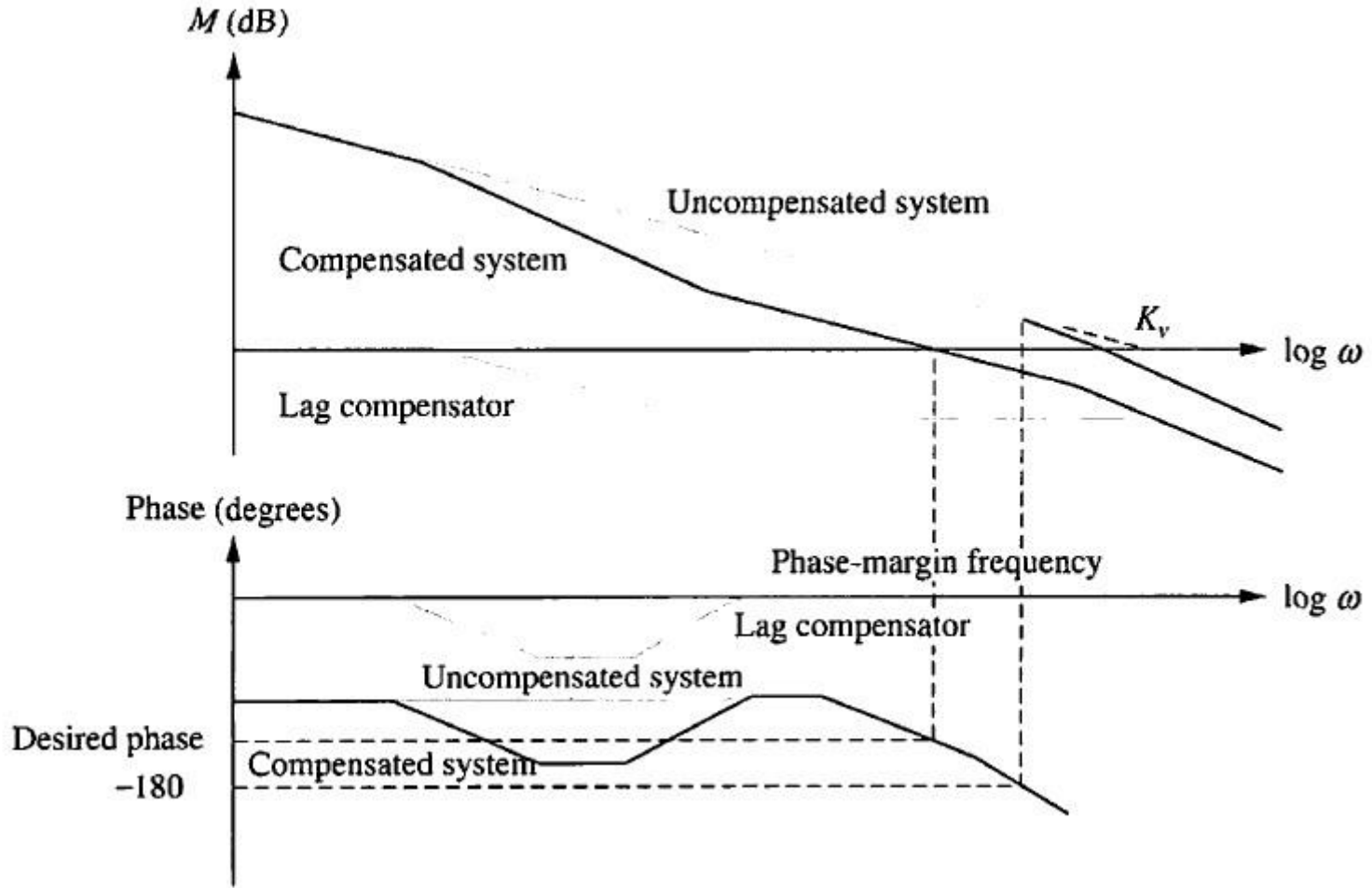
İleri Kompanzasyon

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

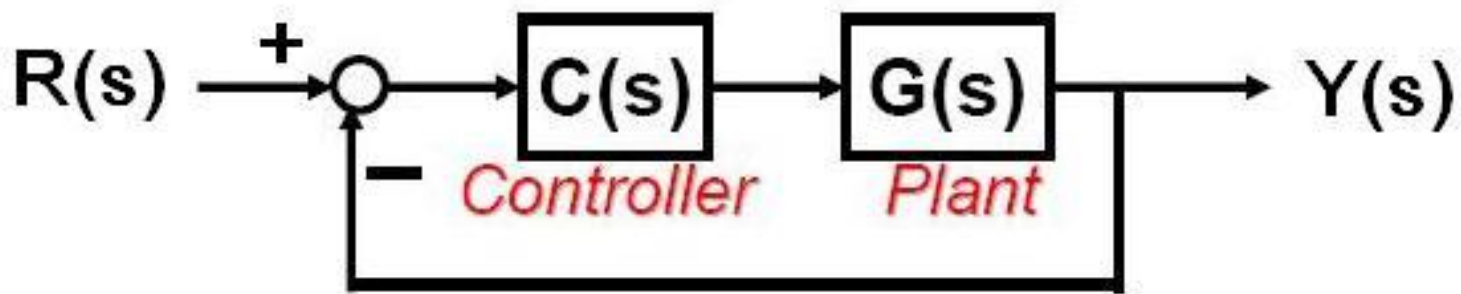


Geri Kompanzasyon

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$



İleri Kompanzasyon



İleri Kompanzasyon (*Lead Compensation*) geçici durum tepkisini iyileştirir.

Açık döngü sistemin transfer fonksiyonuna kazanç geçiş frekansında (ω_{gc}) faz ekler.

İleri Kompanzator

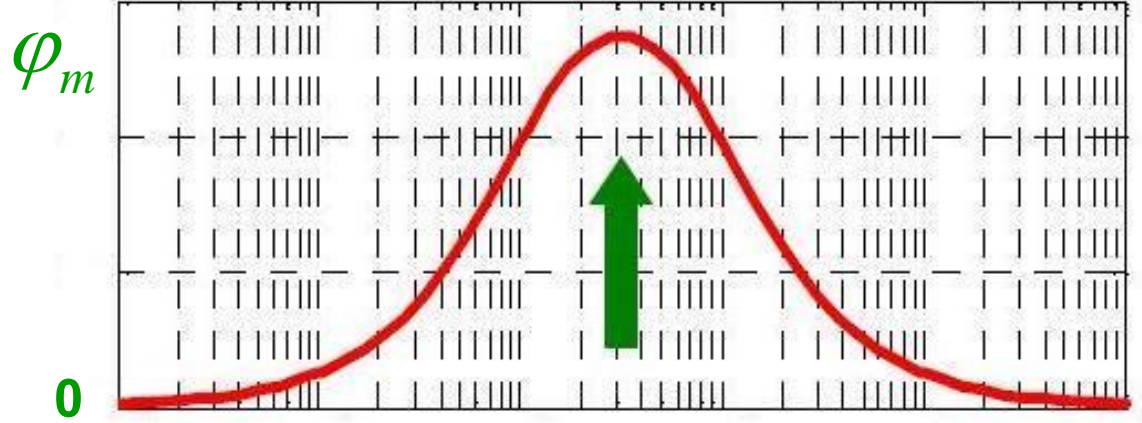
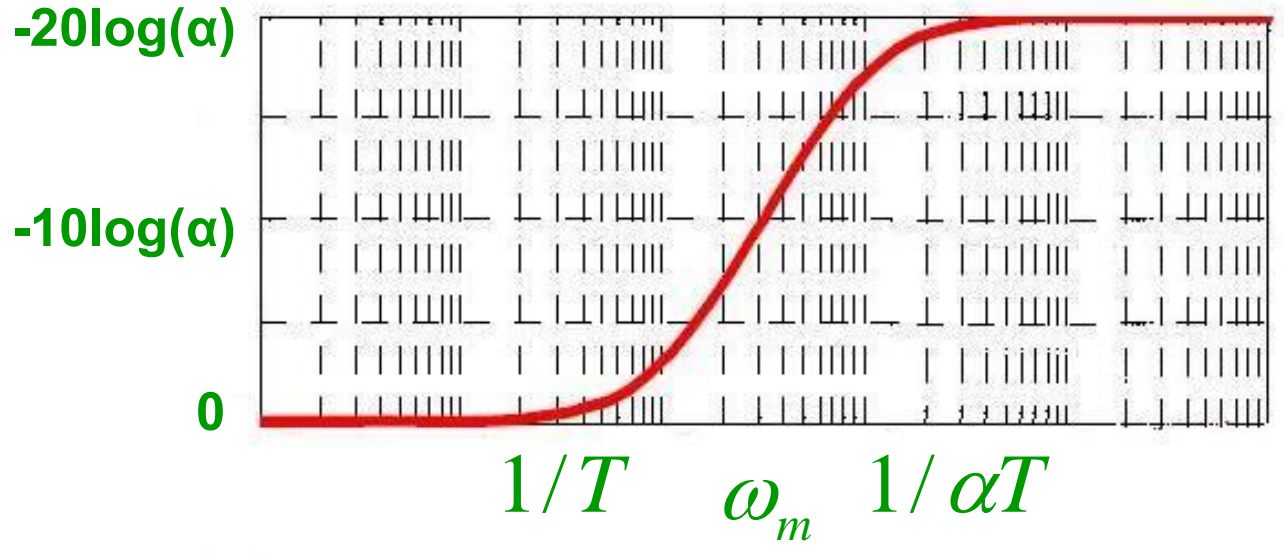
$$C(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

$(\alpha < 1)$

Maksimum faz açısı:
 ω_m 'de oluşur:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T} \sqrt{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

$$\varphi_m = \sin^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$$



FAZ İLERİ

İleri Komp. Tasarım Prosedürü

1. $G(s)$ için faz marjini hesaplanır: PM_1
2. Sisteme eklenmesi gereken faz marjini hesaplanır: φ_m

$$\varphi_m = PM_d - PM_1 + \varepsilon$$

PM_d : Sonuçta istenen faz marjini

ε : Faz düşmesini kompanze etmesi için eklenen ekstra faz (5° - 20°)

3. Maksimum faz (φ_m) elde edecek şekilde α hesaplanır:

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)}$$

İleri Kompanzasyon

Yeni kazanç geçiş frekansı ω_m kompanze edilmemiş sistemin kazancının $10 \log(\alpha)$ (yani, $\sqrt{\alpha}$) değerine eşit olan frekans değeri olarak seçilmelidir. (Sebebi: İleri kompanzatorün ω_m 'deki genlik değeri $-10\log(\alpha)$ 'dır. Yani, biz φ_m kadarlık faz eklerken ω_m 'de bu kadarlık bir genlik de eklenmek zorundadır. Bunu sıfırlamak için ω_m 'i genliğin $10 \log(\alpha)$ olduğu frekans değeri olarak seçiyoruz.)

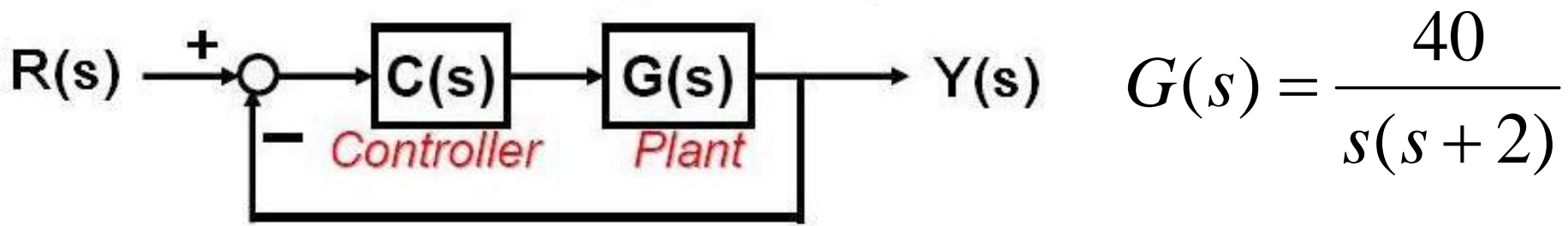
4. ω_m 'de kazanç geçiş frekansı olacak şekilde T'yi hesapla:

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

5. Sonuç olarak, ileri kompanzatorün transfer fonksiyonu:

$$C(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

Örnek



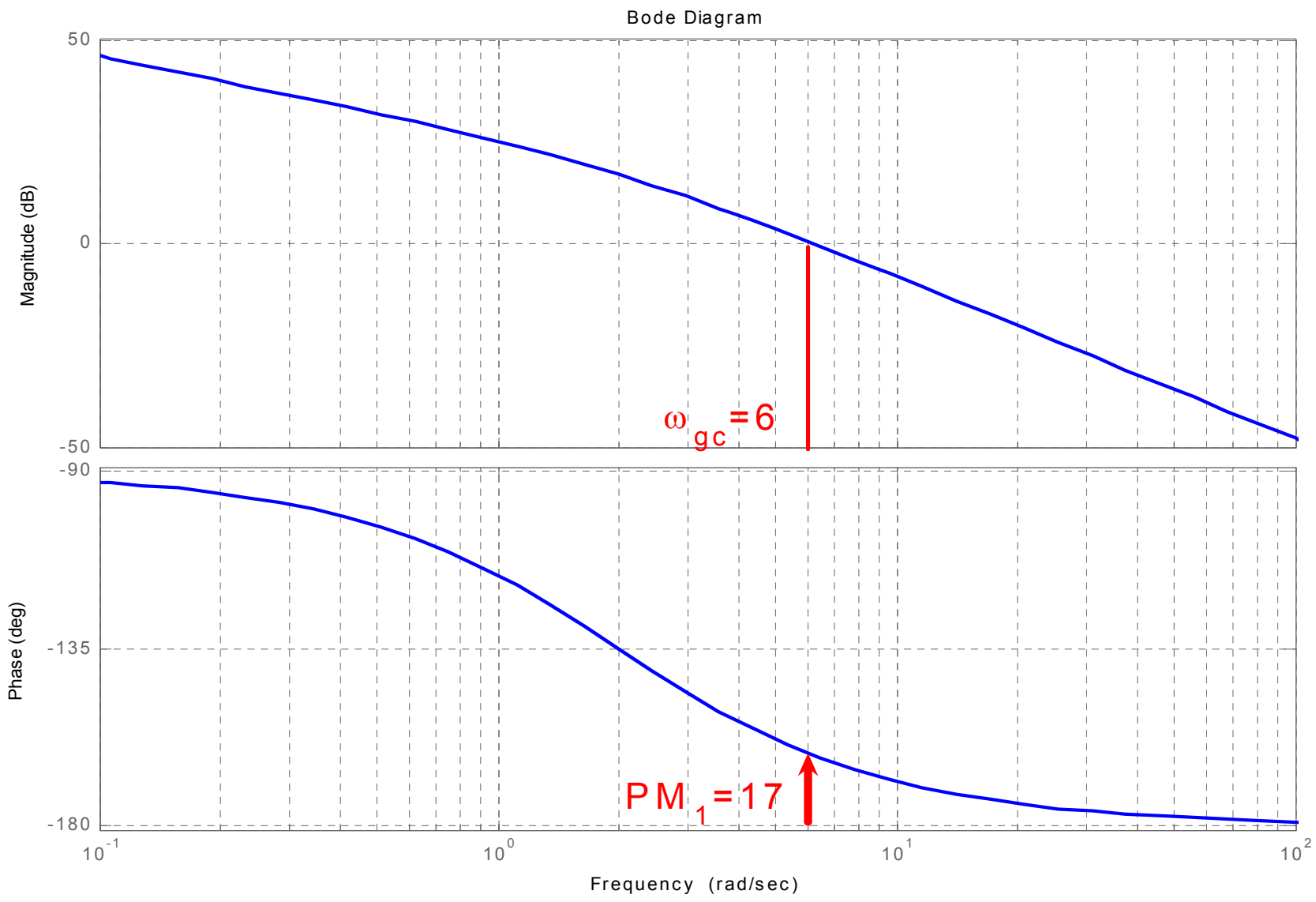
Kapalı döngü sistemin

i. faz marjini $\geq 50^\circ$

ii. kazanç marjini ≥ 10 dB

olacak şekilde bir ileri kompanzator tasarlayınız.

G(s)'e ait bode grafiği



2. İstlenen faz açısı: $50^\circ = PM_d$

$$\begin{aligned}\varphi_m &= PM_d - PM_1 + \varepsilon \\ &= 50^\circ - 17^\circ + 5^\circ \\ &= 38^\circ\end{aligned}$$

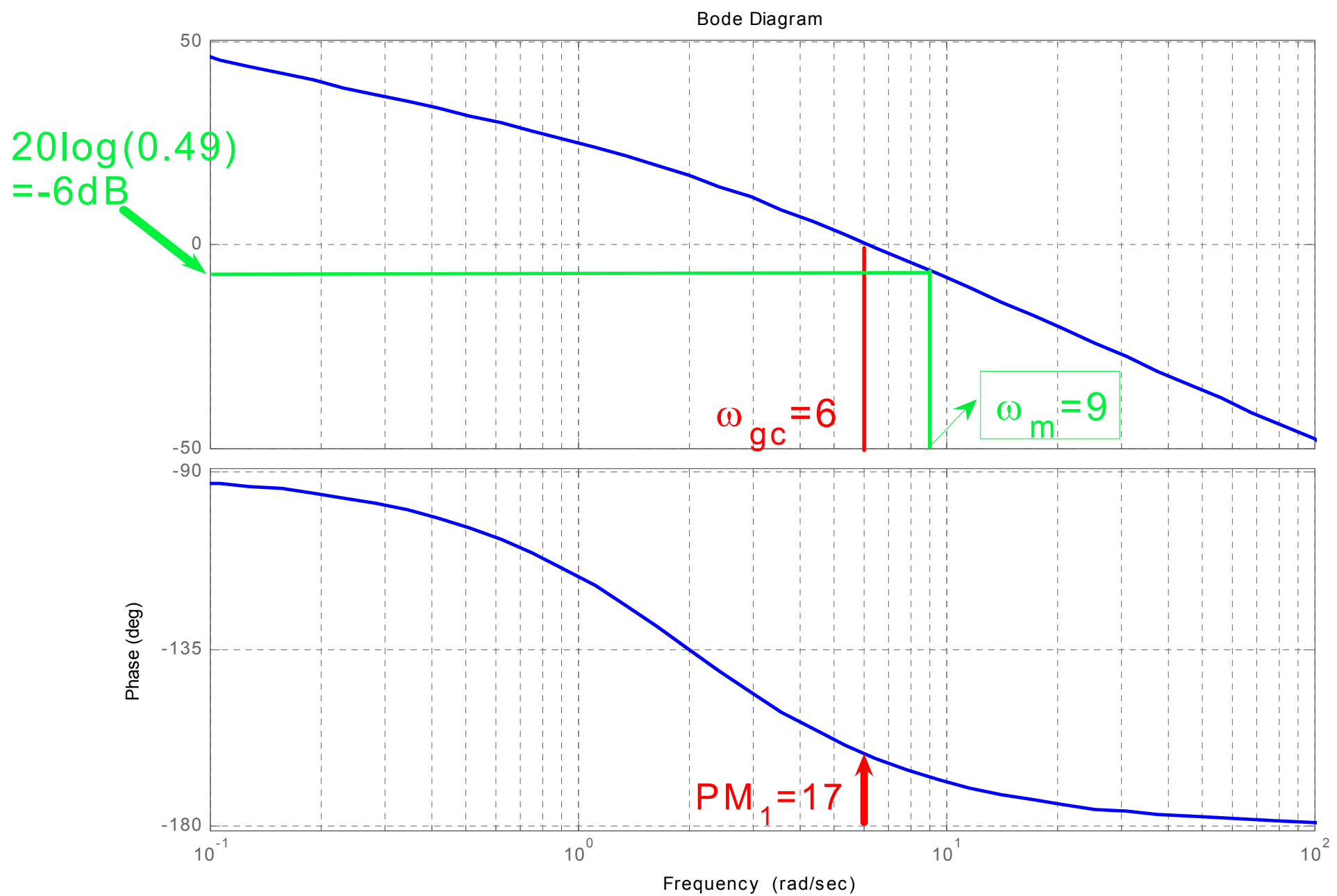
3.

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)} = 0.24$$

4.

$$\sqrt{\alpha} = 0.49$$

Genliği 0.49'a, yani $20 \log(0.49) = -6\text{dB}$ 'ye karşık gelen frekans değerı tablodan bulunursa....



.... $\omega_m = 9$ rad/s. ← yeni kazanç geçiş frekansı

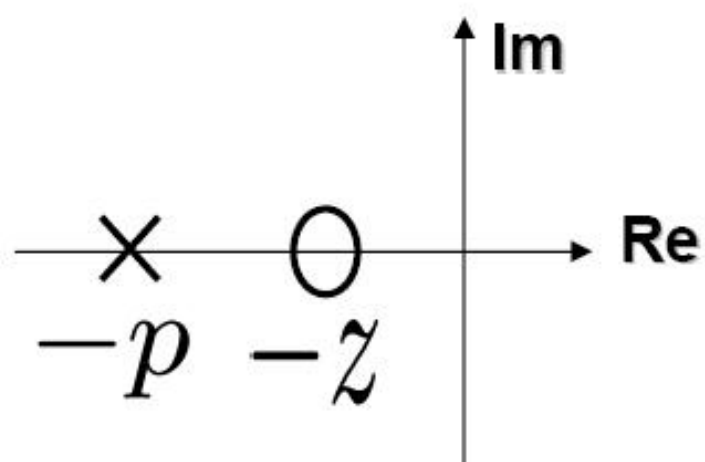
$$4. \quad T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{9\sqrt{0.24}} = 0.226$$

$$5. \quad C(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} = \frac{1 + 0.226s}{1 + 0.054s}$$

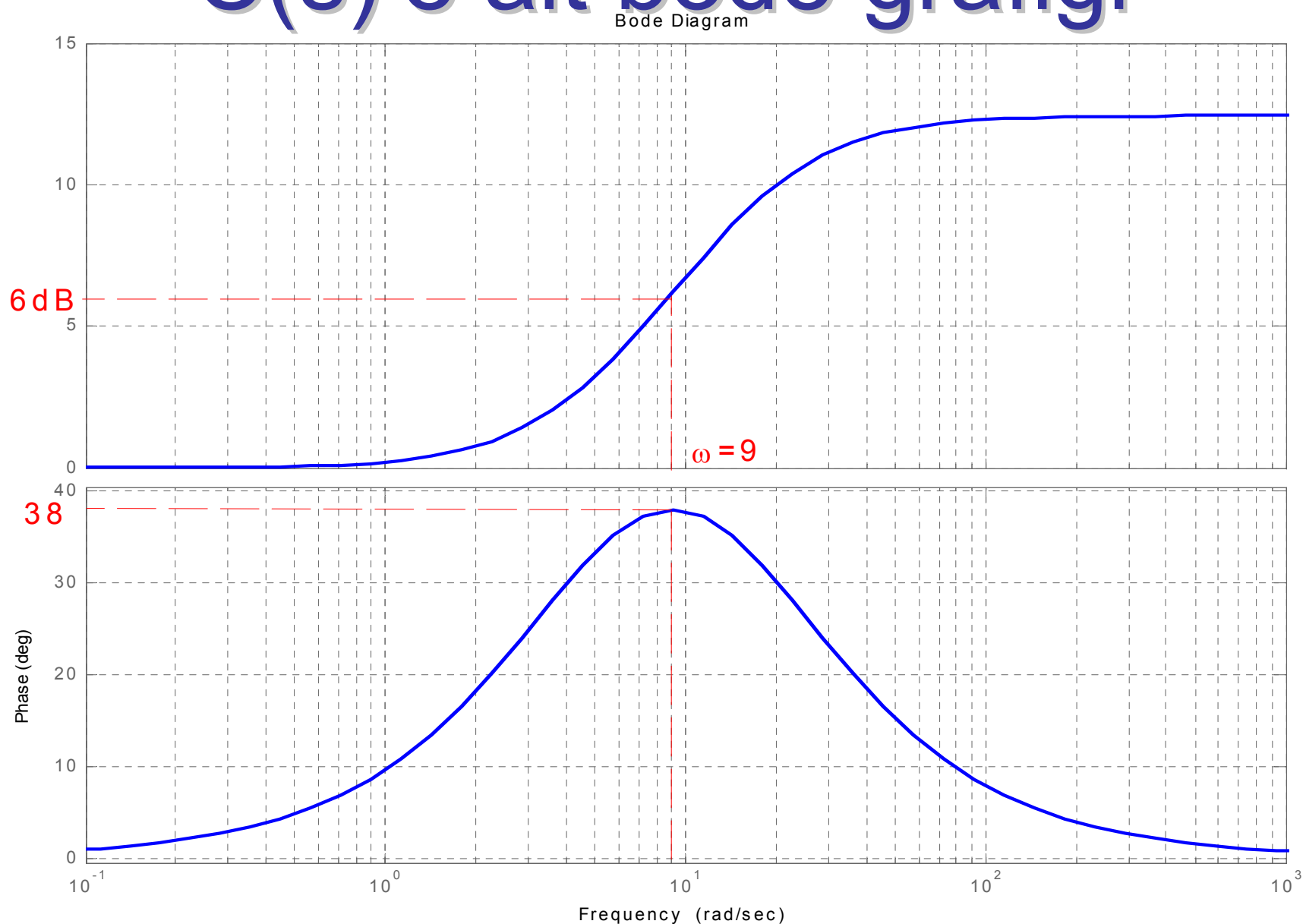
$$C(s) = 4.17 \frac{s + 4.41}{s + 18.4}$$

$$C(s) = 4.17 \frac{s + 4.41}{s + 18.4}$$

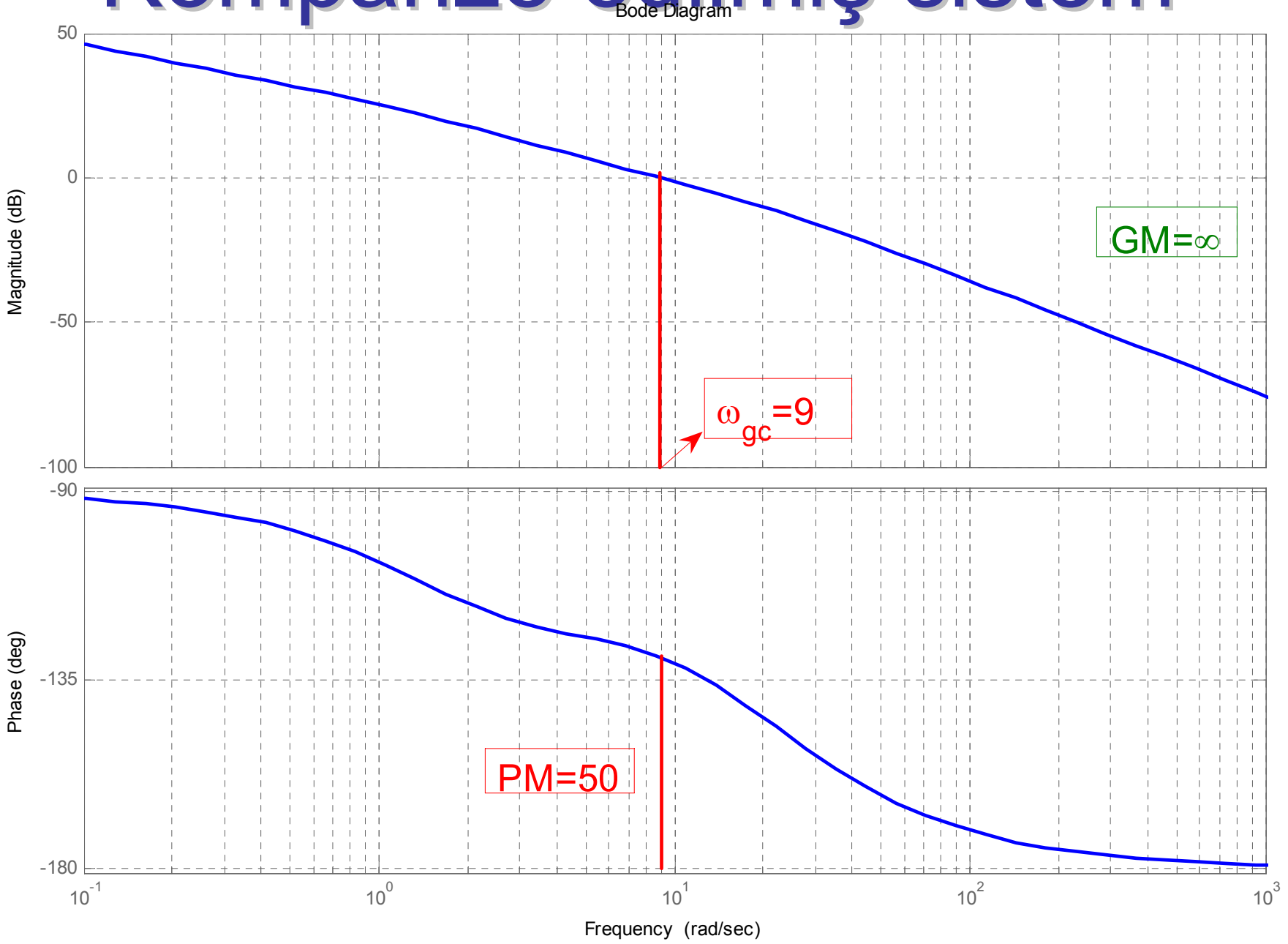
$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p}, \quad (z > 0, p > 0)$$



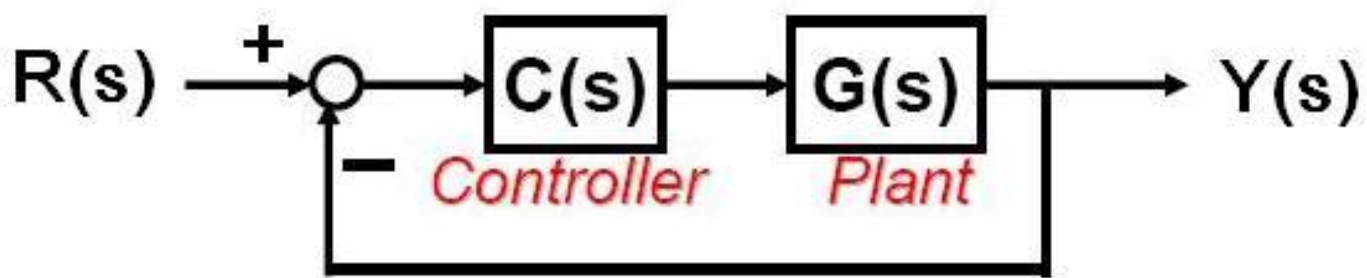
C(s)'e ait bode grafiği



Kompanze edilmiş sistem



Geri Kompanzasyon



Geri Kompanzasyon (*Lag Compensation*)
yatışkın durum tepkisini iyileştirir.

Açık döngü sistemin kazanç ve faz marjini
değiştirmeden düşük frekans kazancını
artırır.

Geri Kompanzator

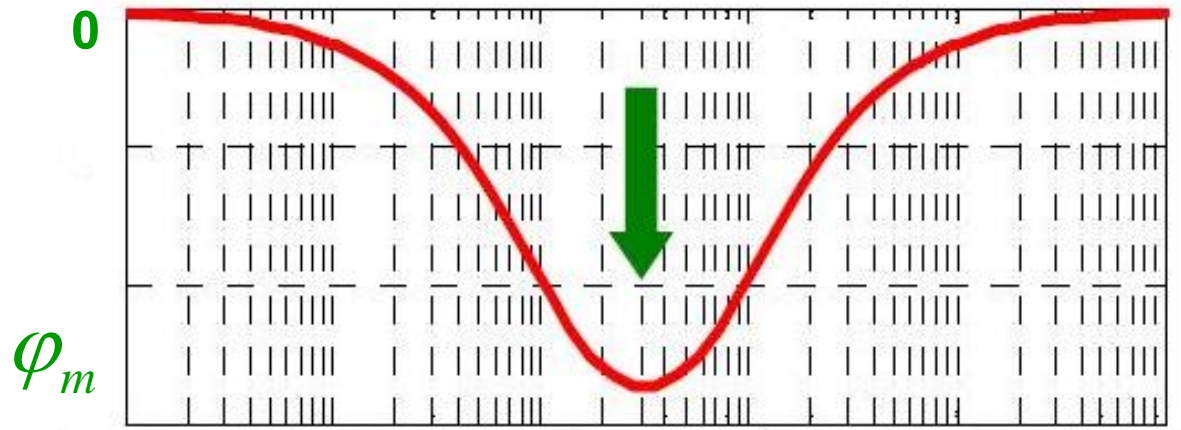
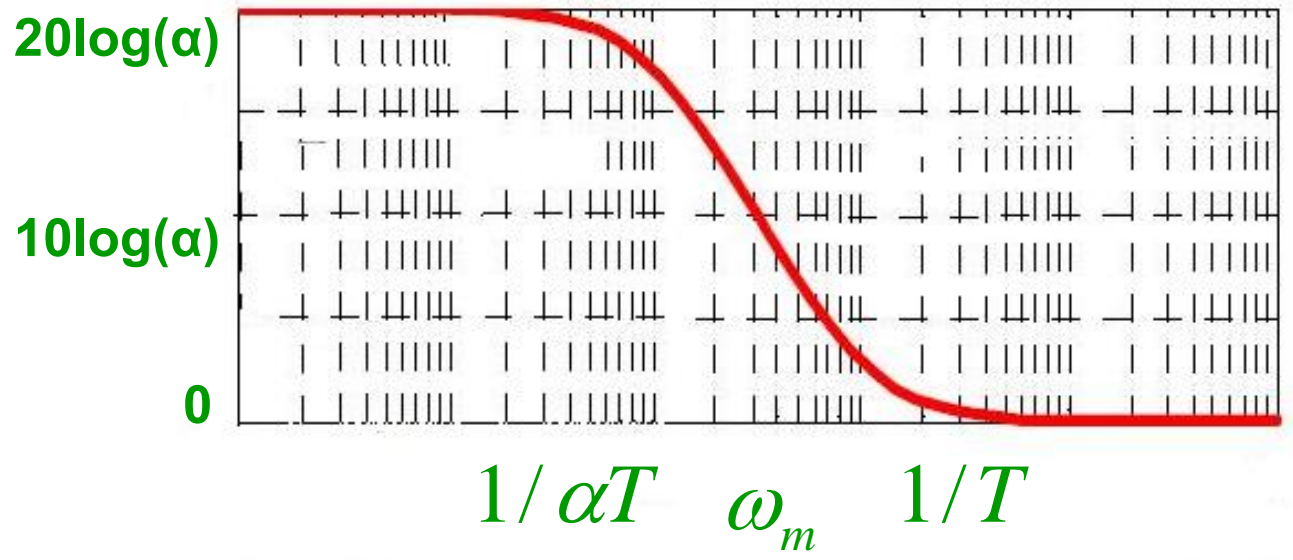
$$C(s) = \alpha \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

$(\alpha > 1)$

Minimum faz açısı:
 ω_m 'de oluşur:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T} \sqrt{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

$$\varphi_m = \text{Sin}^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$$



FAZ GERİ

Geri Komp. Tasarım Prosedürü

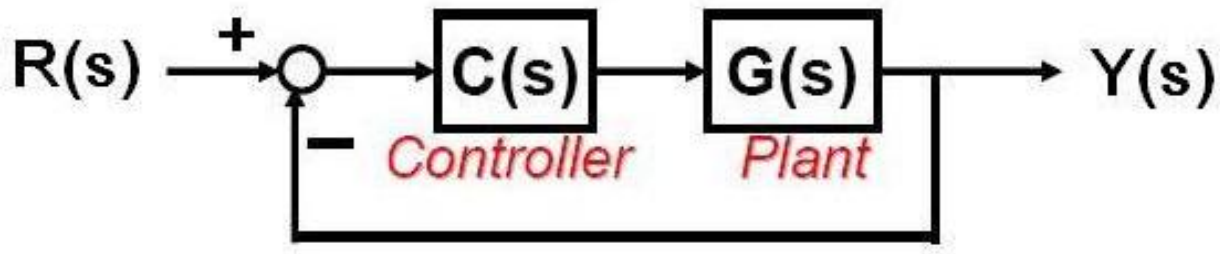
1. İstenen düşük frekans kazanç artışını belirle: α
2. Köşe frekansı $1/T$, sistemin kazanç geçiş frekansı ω_{gc} den oldukça küçük seçilmelidir. Genellikle 1 decade oranında küçük seçilir. Böylece sistemin kazanç ve faz marjinleri etkilenmez.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_{gc}}{10} \Rightarrow T = \frac{10}{\omega_{gc}}$$

3. Sonuç olarak, ileri kompanzatorün transfer fonksiyonu:

$$C(s) = \alpha \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

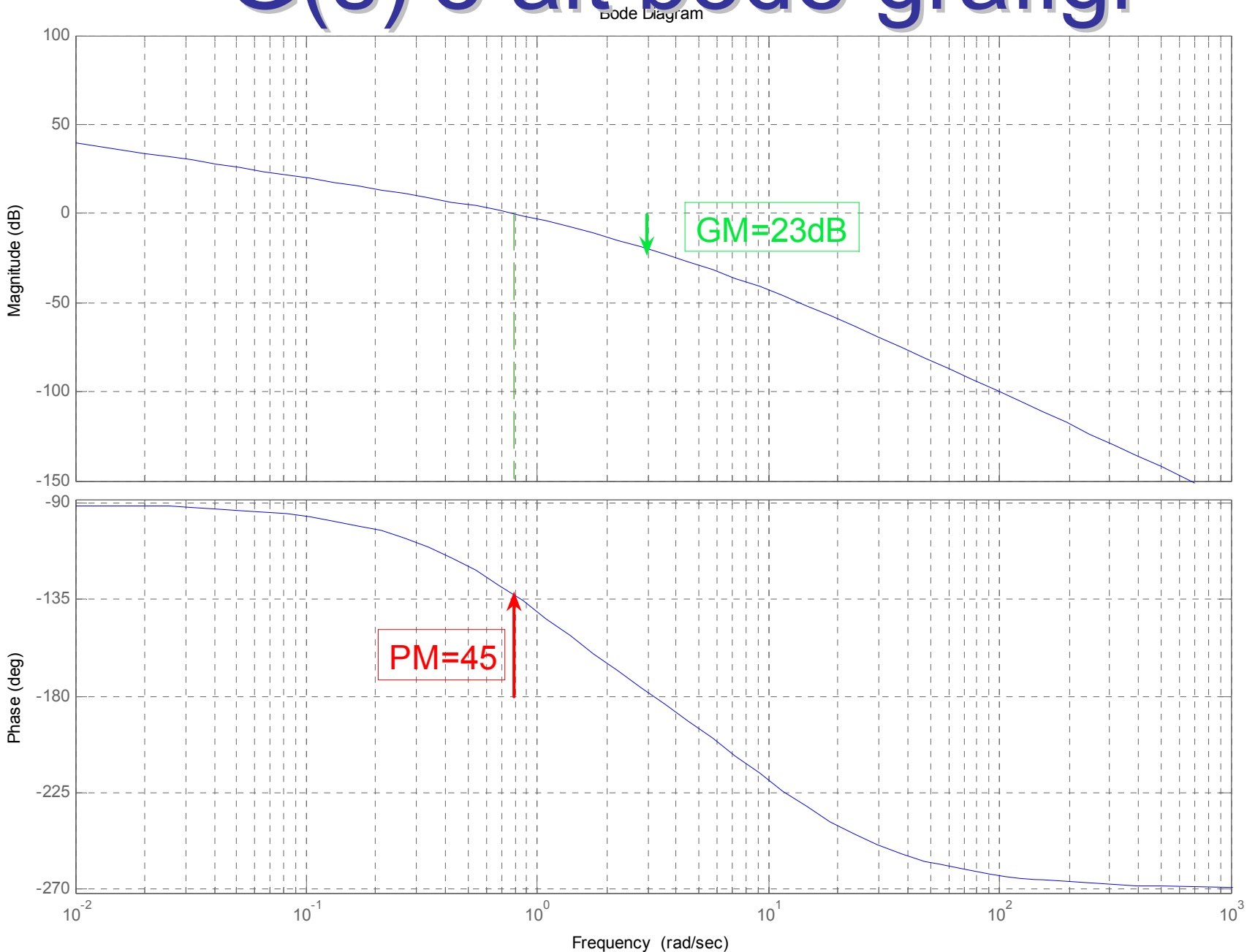
Örnek



$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

- $G(j\omega)$ 'ya ait Bode grafiğini çiziniz.
- Kazanç ve faz marjinlerini hesaplayınız.
- Sisteme rampa fonksiyonu uygulandığında yataşkın durum hata değerini hesaplayınız.
- (c)'de hesapladığınız hata değerini 0.1 değerine düşürmek için bir geri kompanzator tasarlayınız.

G(s)'e ait bode grafiği



c) Sistemin $s=0$ 'da tek bir kutbu olduğundan tipi $N=1$ 'dir.

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} = \frac{1}{s(1+s)(1+1/10s)} \Rightarrow K_V = 1$$

$$N=1 \text{ \& } r(t): \text{ rampa} \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_V} = 1$$

d) Sistemin kompanze edildikten sonra açık döngü kazancı $K_V \alpha = 1$ olacağından yeni kararlı hal

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

Bu değer 0.1 olması için $\alpha = 10$ olmalıdır.

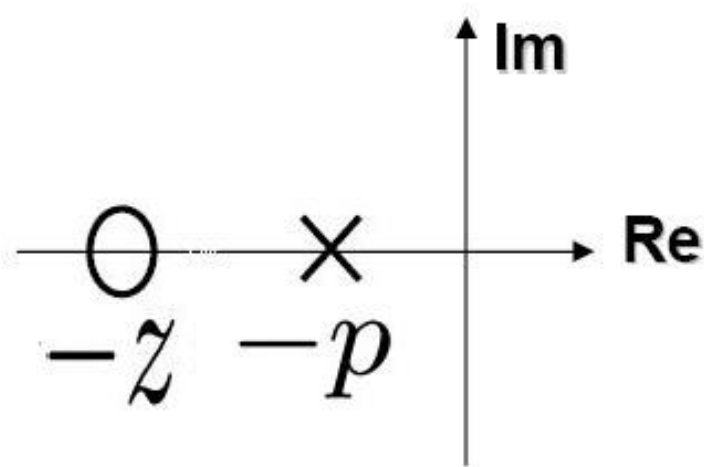
Ayrıca, Bode grafiklerinden kazanç geçiş frekansı $\omega_{gc}=0.8\text{rad/s}$. olarak belirlenir. Bu durumda, T değeri:

$$T = \frac{10}{\omega_{gc}} = \frac{10}{0.8} = 12.5$$

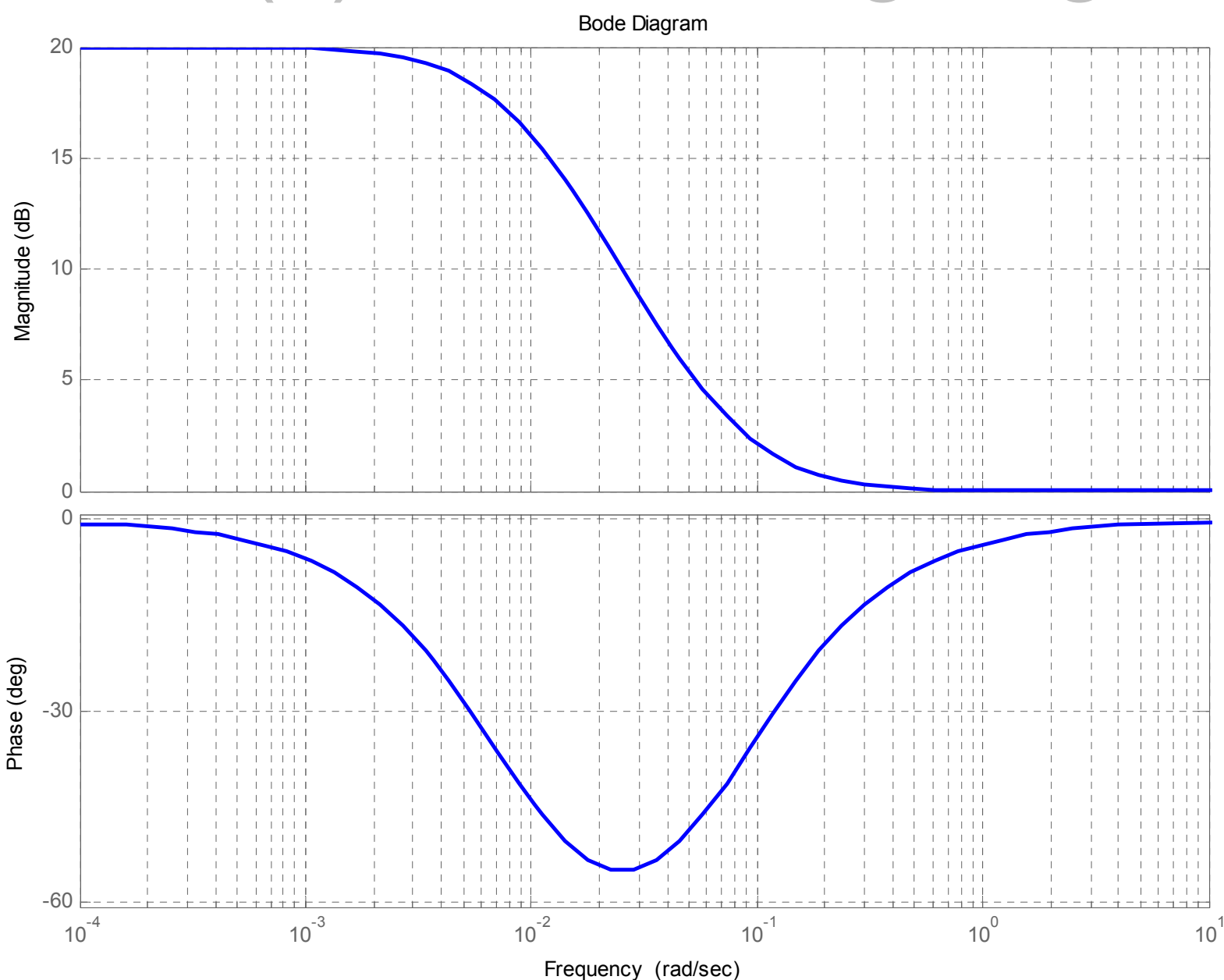
$$C(s) = \alpha \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} = 10 \frac{1 + 12.5s}{1 + 125s}$$

$$C(s) = \frac{s + 0.08}{s + 0.008}$$

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p}, \quad (z > 0, p > 0)$$

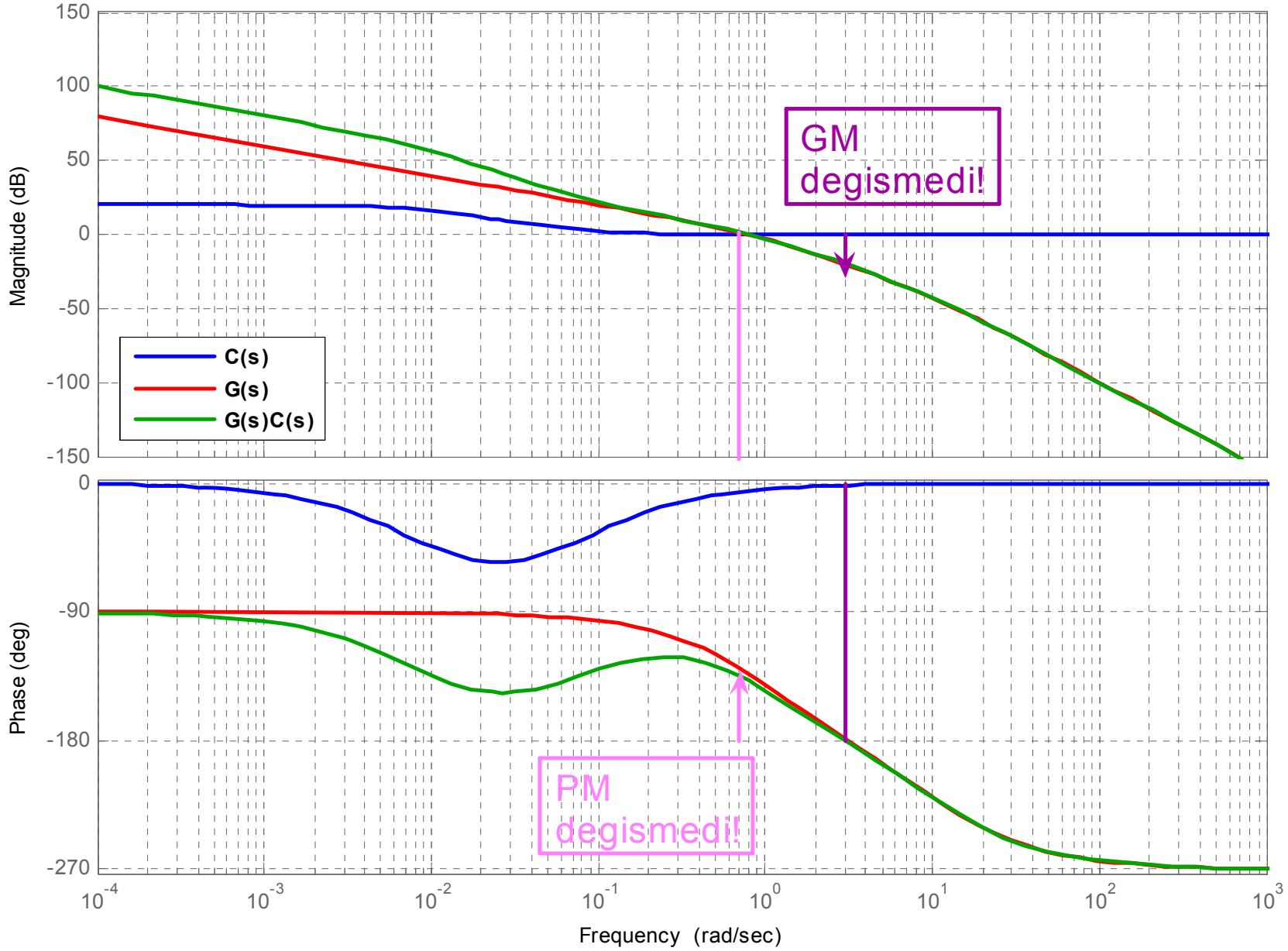


C(s)'e ait bode grafiği



G(s), C(s) ve G(s)C(s)

Bode Diagram



Kaynaklar

1. *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999.
2. *Automatic Control Systems*, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley, 2010.
3. *Modern Control Systems*, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Prentice Hall, 2011.
4. *Control System Engineering*, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.
5. *Modern Control Engineering*, K.OGATA, Prentice-Hall, 1997.
6. *Feedback and Control Systems*, Joseph J.Distefano, Allen R.Stubberrud, Ivan J.Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.
7. *Otomatik Kontrol Ders Notları*, Prof.Dr. Galip CANSEVER, YTÜ, 2007.
8. *Kontrol Sistem Teorisi Ders Notları*, Banu ATAŞLAR AYYILDIZ, YTÜ, 2008.
9. *Ders Notları için İnternet Adresi*: <http://www.tuncayuzun.com/>,
<http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/>