

# EHM3132 Gr.1

# Otomatik Kontrol

## Bölüm 8

### Frekans Düzleminde Kararlılık, Nyquist Kararlılık Analiz Yöntemi

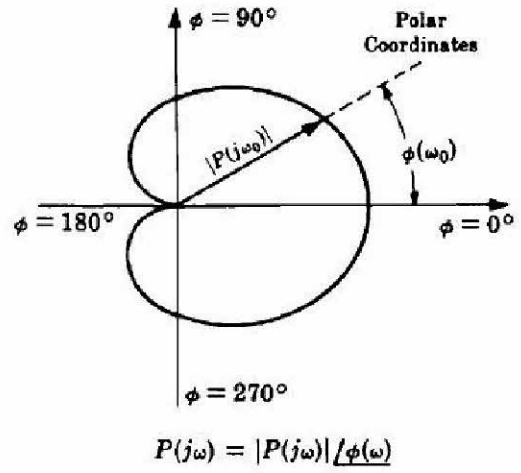
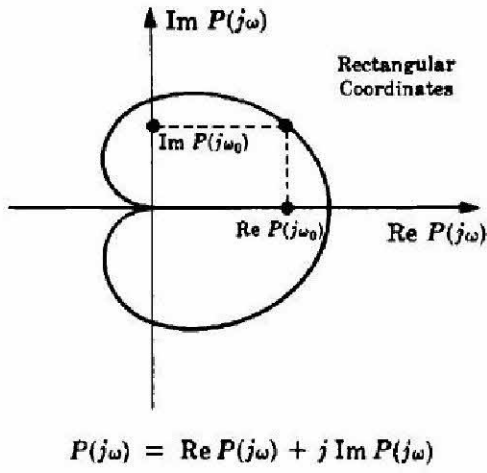
## Nyquist Kararlılık Analiz Yöntemi

*Nyquist kriteri kapalı çevrim sistemin kararlılığı, açık çevrim sisteminin frekans yanıtına ve açık çevrim kutuplarının yerine bağlıdır. Bu nedenle açık çevrim sisteminin frekans yanıtı, kapalı çevrim sisteminin kararlılığı hakkında bilgi verir. Kök yer eğrilerine benzemesine rağmen, Nyquist kriteri kararlılık bilgisini verirken, geçici rejim yanıtı ve kararlı-hal hatası için kavramsal olarak genişletilebilir.*

*Nyquist Kriteri:*

- *Routh-Hurwitz kriteri gibi sistemin mutlak kararlılığı, kararlı sistemin görelî kararlılığı, kararsız sistemin kararsızlığı ve nasıl düzeltilebileceği hakkında bilgi verir.*
- *Bilgisayar ile kolayca çizilebilir. Frekans tanım bölgesi karakteristikleri ile ilgili bilgi edinilebilir.*

## Kutupsal Koordinatlar ve Çizimi



**Örnek:** Aşağıda verilen  $GH$ 'nin kutupsal koordinatlarda  $\omega=0 \rightarrow \infty$  için çizimi:

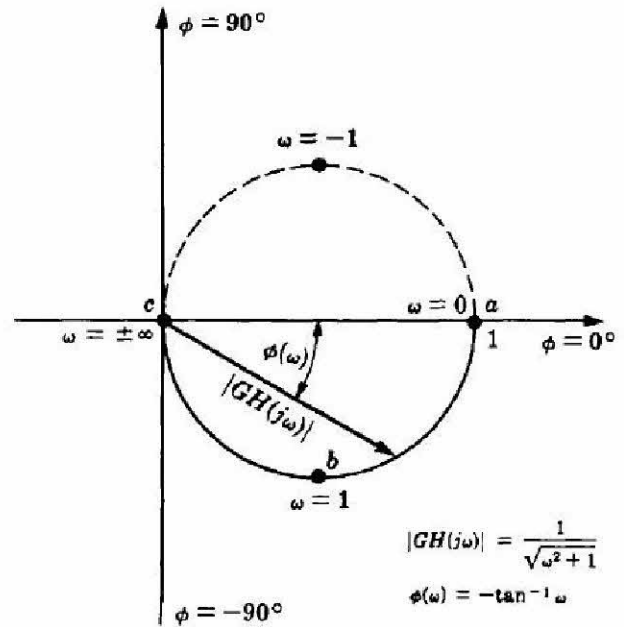
$$GH(s) = \frac{1}{s+1} \quad GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \angle -\tan^{-1} \omega$$

$\omega=0$ ,  $\omega=1$  ve  $\omega \rightarrow \infty$  için:

$$GH(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$GH(j1) = (1/\sqrt{2}) \angle -45^\circ$$

$$GH(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$$



## Nyquist Kararlılık Analiz Yöntemi

Nyquist Kriterinin türetilmesinde dört önemli kavram kullanılır.

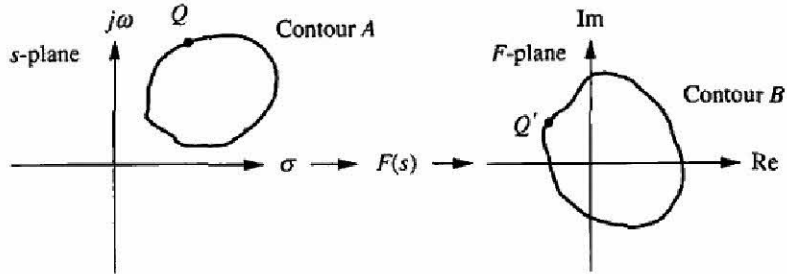
1.  $1+G(s)H(s)$  in kutupları ile  $G(s)H(s)$  in kutupları arasındaki ilişki,  $1+G(s)H(s)$  in kutupları ile  $G(s)H(s)$  açık çevrim sisteminin kutupları aynıdır.
2.  $1+G(s)H(s)$  in sıfırları ile  $T(s)$  kapalı çevrim sisteminin kutupları arasındaki ilişki,  $1+G(s)H(s)$  in sıfırları ile  $T(s)$  kapalı çevrim sisteminin kutupları aynıdır.

### 3. Haritalama noktaları, eşleme kavramı

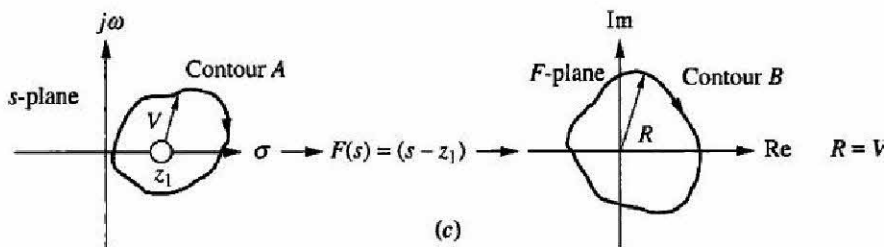
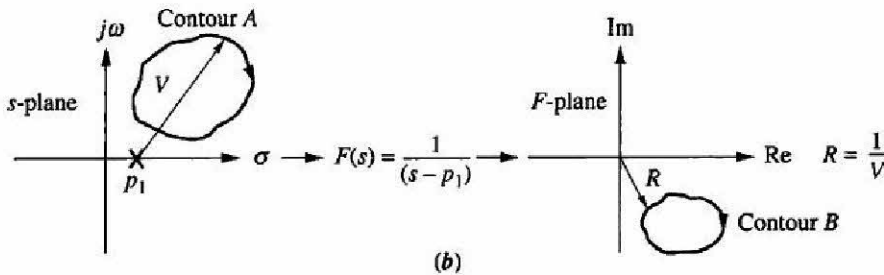
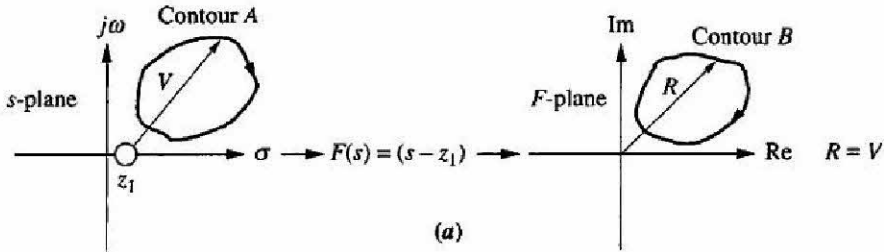
Eğer bir  $F(s)$  fonksiyonunun içinde  $s$ -düzleminde bir kompleks sayı alınırsa,  $F(s)$  in sonucu diğer bir kompleks sayıdır. Bu işleme haritalama adı verilir. Örneğin  $F(s) = s^2 + 2s + 1$  fonksiyonunun  $s = 4 + j3$  değeri için değeri  $16 + j30$  kompleks sayıdır.

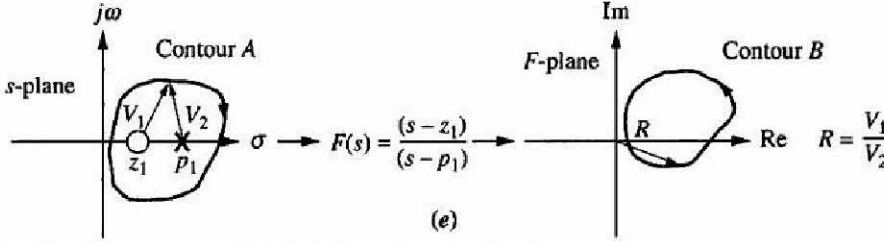
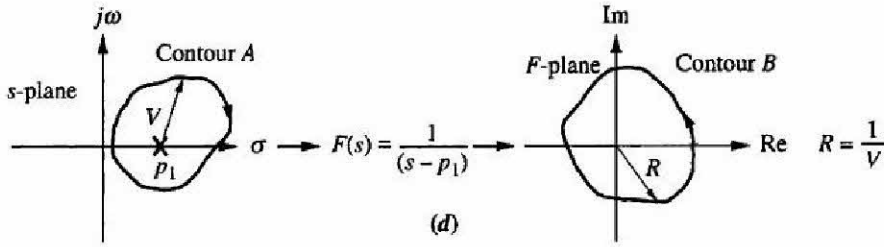
### 4. Haritalama, eşleme dağılımı kavramıdır.

Yukarıda elde edilen kompleks sayılar çoğaltılırsa eşleme dağılımı, haritalama eğrisi elde edilir.

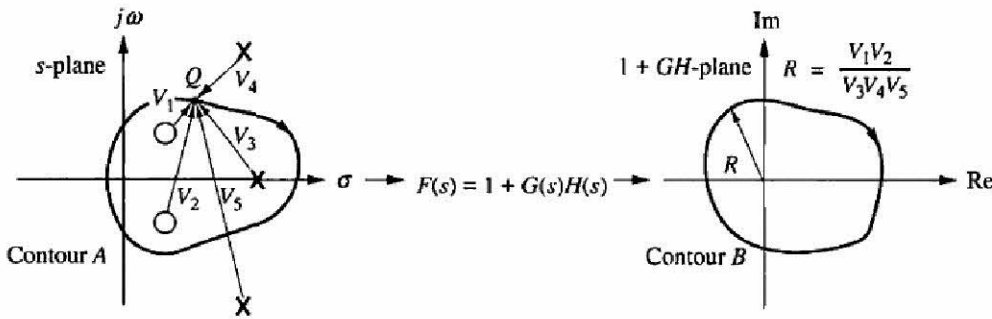


## Haritalama Örnekleri





### Haritalamanın Vektör gösterimi



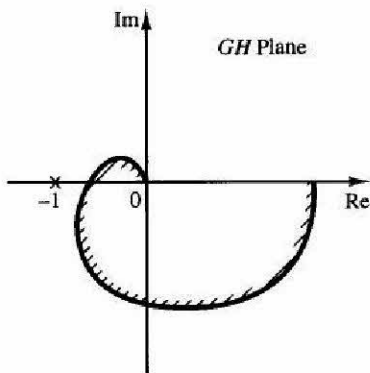
### Nyquist Kararlılık Kriteri

Karakteristik denklem  $1+G(s)H(s)=0$ . Nyquist kararlılık kriteri,  $G(j\omega)H(j\omega)$  açık çevrim frekans yanıtını,  $1+G(s)H(s)$ 'in sağ yarı düzlemdeki kutup ve sıfırlarının sayısına bağlar. Bu yöntem kapalı çevrim kutuplarına ihtiyaç duymadan açık çevrim frekans yanıt eğrilerinden grafik olarak kapalı çevrim sisteminin mutlak kararlılığını hesaplar.

1. Kararlılık için  $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nın Nyquist diyagramında  $-1+j0$  noktasını çevreleyen çevrelere bakılır. Bunu belirlemek için kutup, sıfır ve çevre için:

$$Z=N+P$$

- $Z=1+G(s)H(s)$ 'in sağ yarı düzlemdeki sıfırlarının sayısı
- $P=1+G(s)H(s)$ 'in sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısı
- $N=-1+j0$  noktasını çevreleyen (saat yönünde) çevre sayısı



Eğer kararlı bir kontrol sistemi için  $P$  sıfır değilse,  $Z=0$  veya  $N=-P$  olması gerekir.  $-1+j0$  noktasını saat yönünün tersine çevreleyen  $P$  çevre olmalıdır.  $G(s)H(s)$ 'in sağ yarı  $s$ -düzleminde kutbu yoksa  $Z=N$  olur.  $-1+j0$  noktasını çevreleyen çevre yoktur. Bu durumda  $j\omega$  ekseninin tamamında gerekli değildir. Yalnız pozitif frekans kısmında vardır.

$-1+j0$  noktası Nyquist diyagramının kapattığı bölge dışında ise sistem **Kararlıdır**.

2. Sağ yarım  $s$ -düzlemde kutbu olan birden çok çevrimli sistemlerin kararlılığını incelerken dikkatli olunmalıdır. Basit olarak  $-1+j0$  noktasına bakmak yeterli değildir. Bu durumda Routh kararlılık kriteri uygulanarak mutlak kararlılık belirlenebilir.

$G(s)H(s)$ 'in içerdiği çıkış açıları  $e^{-Ts}$  gibi bir fonksiyon içerir.

$$e^{-Ts} \approx \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

Bu  $0 \leq \omega \leq (0.5/T)$  frekans sınırlarında çıkış açısı için iyi bir yaklaşıktır.

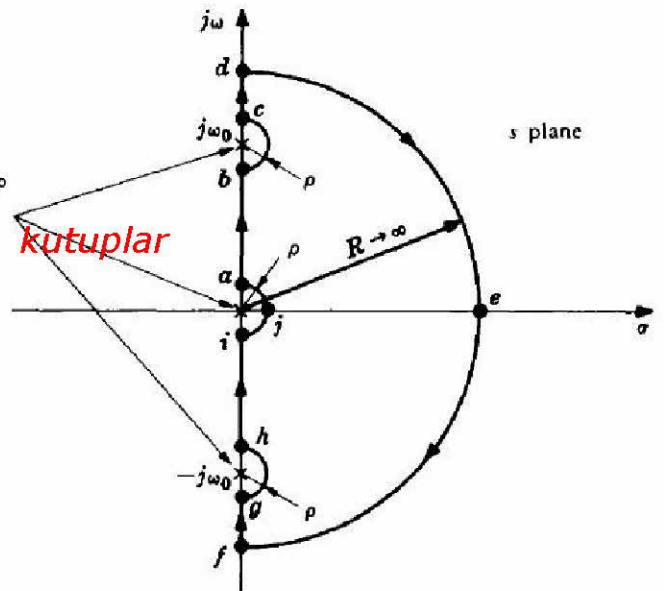
3.  $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nin eğrisi tam  $-1+j0$  noktasından geçiyorsa karakteristik denklemin sıfırları veya kapalı çevrim kutupları  $j\omega$  eksenindedir. Sistem **Kritik Kararlıdır**.

Çok iyi tasarlanmış bir kapalı çevrim sisteminde, karakteristik denklemin kökleri  $j\omega$  ekseninde bulunmaz.

## Nyquist Yolu

Nyquist yolu,  $s$ -düzleminde kapalı bir eğridir ve  $s$ -düzleminin sağ yarısını kapsar. Bu eğri fonksiyonun hiçbir kutbundan geçmemelidir! Eğer bu şekilde sanal ekseninde veya orijinde kutuplar varsa, bunların etrafında küçük yarım daireler çizilir. Bu küçük yarım daireler kutupsal koordinatlarda sıfıra çok yakın boyutta yaklaşık daireler anlamına gelir. Son olarak  $s$ -düzleminin sağ yarısını tümüyle kapsamak için sonsuz yarıçaplı bir daire çizilir.

$\overline{ab}$ :	$s = j\omega$	$0 < \omega < \omega_0$
$\overline{bc}$ :	$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho e^{j\theta})$	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
$\overline{cd}$ :	$s = j\omega$	$\omega_0 \leq \omega < \infty$
$\overline{def}$ :	$s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}$	$+90^\circ \leq \theta \leq -90^\circ$
$\overline{fg}$ :	$s = j\omega$	$-\infty < \omega < -\omega_0$
$\overline{gh}$ :	$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (-j\omega_0 + \rho e^{j\theta})$	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
$\overline{hi}$ :	$s = j\omega$	$-\omega_0 < \omega < 0$
$\overline{ija}$ :	$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}$	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$



## Nyquist Diyagramının Çizimi

Nyquist Diyagramı çizilirken önce Nyquist yolu çizilir. Sonra Nyquist yolundaki açılardan yararlanılır ve önemli  $\omega$ , frekans değerleri için genlik ve açı hesaplanarak aşağıdaki adımlar kullanılarak Nyquist Diyagramı çizilir.

1. Sanal ekseninde veya orijinde kutuplar belirlenir.
2. Fonksiyonun kutupsal koordinatlarda  $\omega=0 \rightarrow \infty$  çizimi için:

$$s = j\omega \quad 0 < \omega < \omega_0$$

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho e^{j\theta}) \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$s = j\omega \quad \omega_0 \leq \omega < \infty$$

Eğer orijinde veya sanal ekseninde kutup yoksa ikinci denklem kullanılmaz.

3. Çizimin sonunda, çizilen eğrinin reel eksene göre aynadaki görüntüsü çizilir.
4. Çizimin sonsuzdaki yolunu tamamlamak için kullanılır.

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta} \quad +90^\circ \leq \theta \leq -90^\circ$$

5. Çizimin orijindeki yolu için kullanılır.

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta} \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

6. Çizimin bütün eğrileri yukarıdaki adımlar kullanılarak tamamlanır.

**Örnek 8-1:** Aşağıda verilen Tip 0 sistemin  $\omega=0 \rightarrow \infty$  için çizimi:

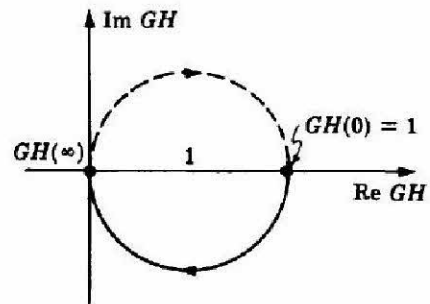
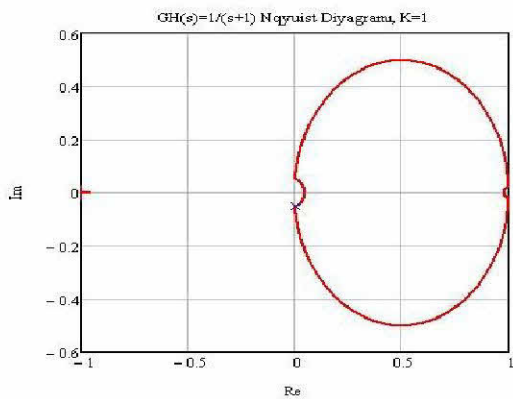
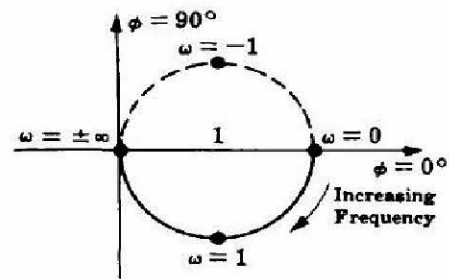
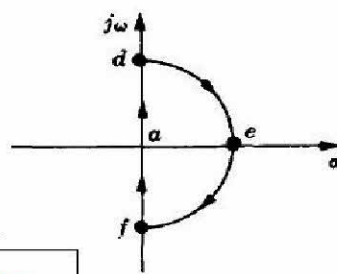
$$GH(s) = \frac{1}{s+1} \quad GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \angle -\tan^{-1} \omega$$

$\omega=0$ ,  $\omega=1$  ve  $\omega \rightarrow \infty$  için:

$$GH(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$GH(j1) = (1/\sqrt{2}) \angle -45^\circ$$

$$GH(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$$



**Örnek 8-2: Aşağıda verilen Tip 1 sistemin  $\omega=0 \rightarrow \infty$  için çizimi:**

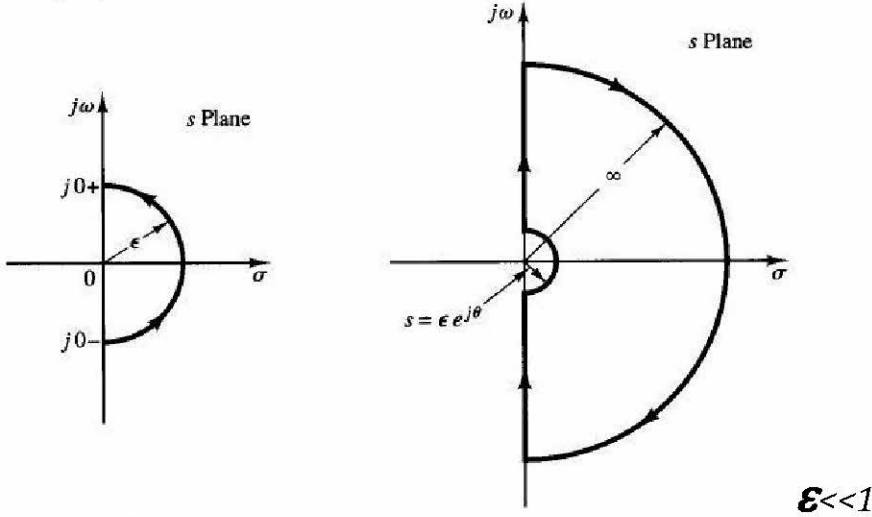
$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \angle(-90 - \tan^{-1}(\omega))$$

$K=1, \omega=0, \omega=1$  ve  $\omega \rightarrow \infty$  için:

$$GH(j0) = \infty \angle -90^\circ$$

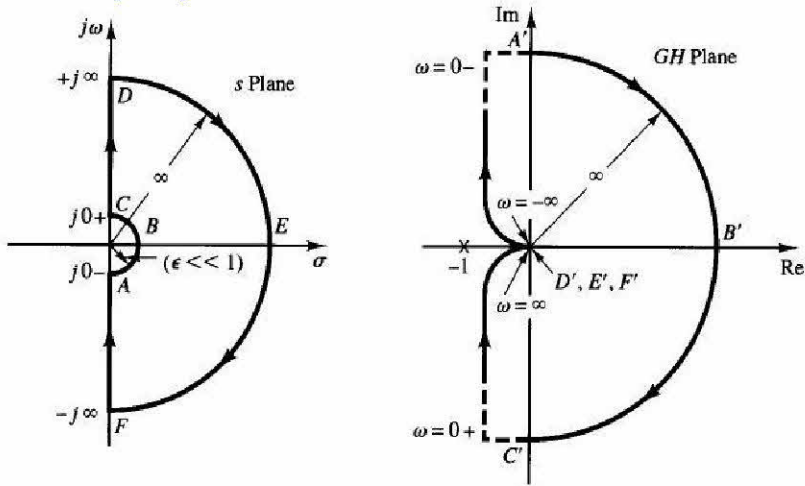
$$GH(j1) = (1/\sqrt{2}) \angle -135^\circ$$

$$GH(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

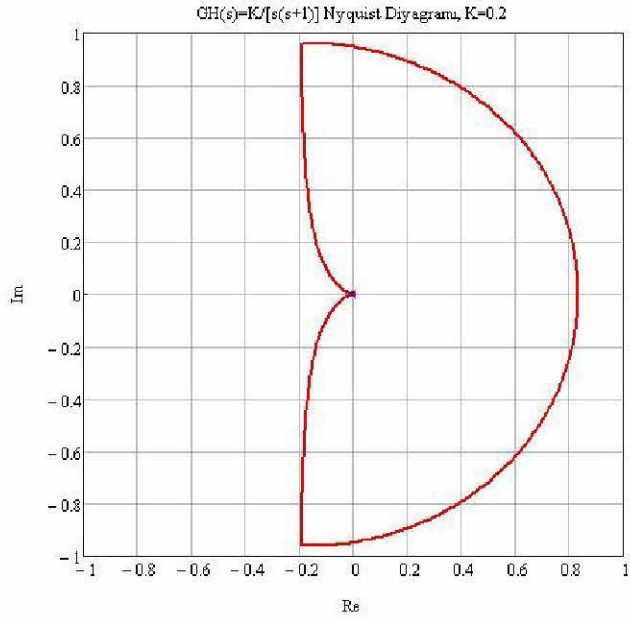


**$\omega=0$  için çizim**

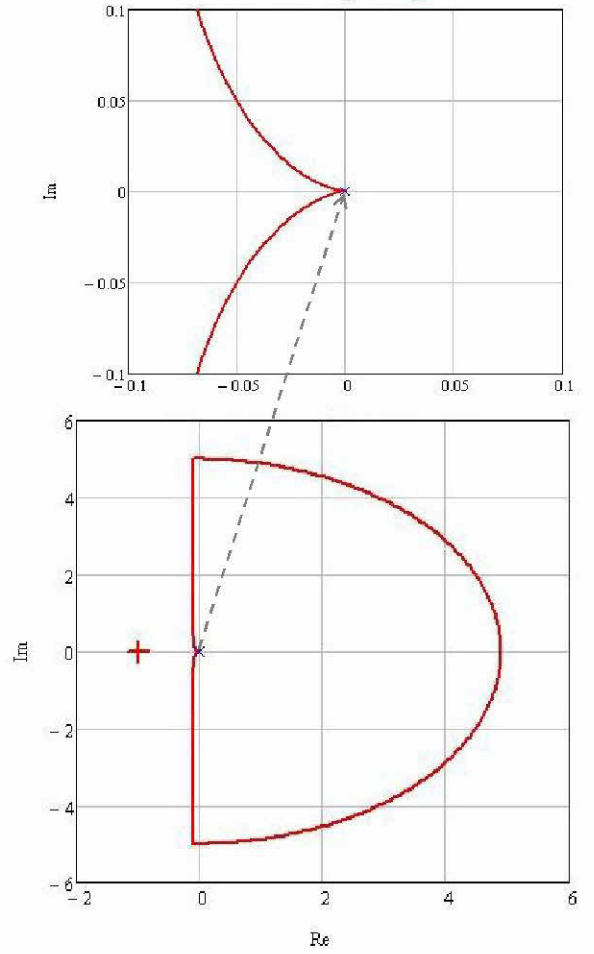
**$\omega \rightarrow \infty$  için çizim**



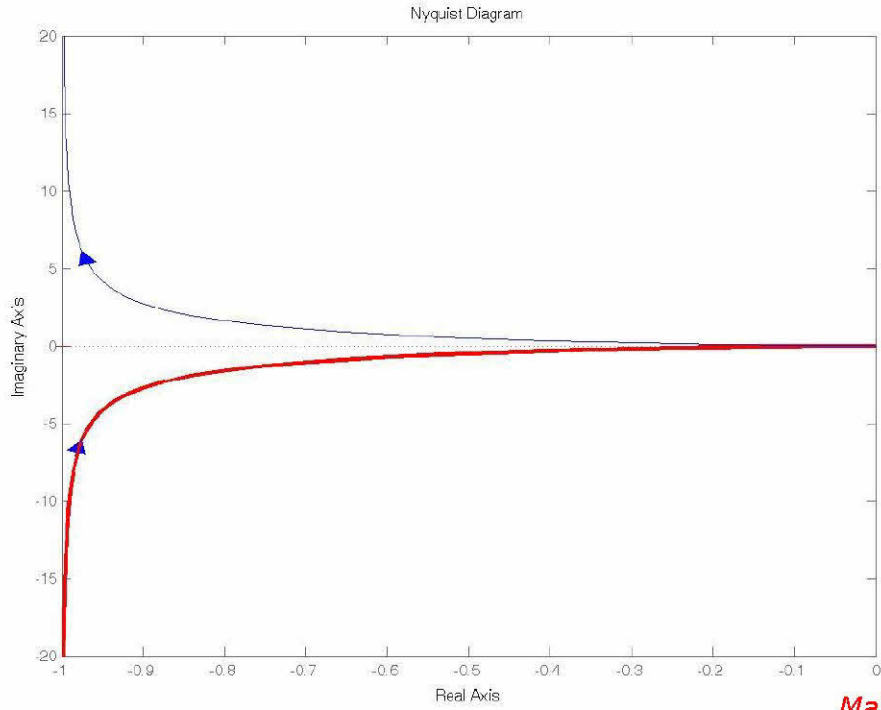
### ***K=0.2 ve $\omega 0 \rightarrow \infty$ için çizim***



### ***K=1 ve $\omega 0 \rightarrow \infty$ için çizim***



8. Otomatik Kontrol, Frekans Düzleminde Kararlılık, Nyquist Kararlılık Analiz Yöntemi



***MatLab Çizimi***

8. Otomatik Kontrol, Frekans Düzleminde Kararlılık, Nyquist Kararlılık Analiz Yöntemi

Dr.Tuncay UZUN 8-16



**Örnek 8-3:** Aşağıda verilen Tip 2 sistemin  $\omega=0 \rightarrow \infty$  için çizimi:

$$GH(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} GH(s) = \frac{K}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta} \quad ; -\theta \quad 180^\circ \rightarrow -180^\circ$$

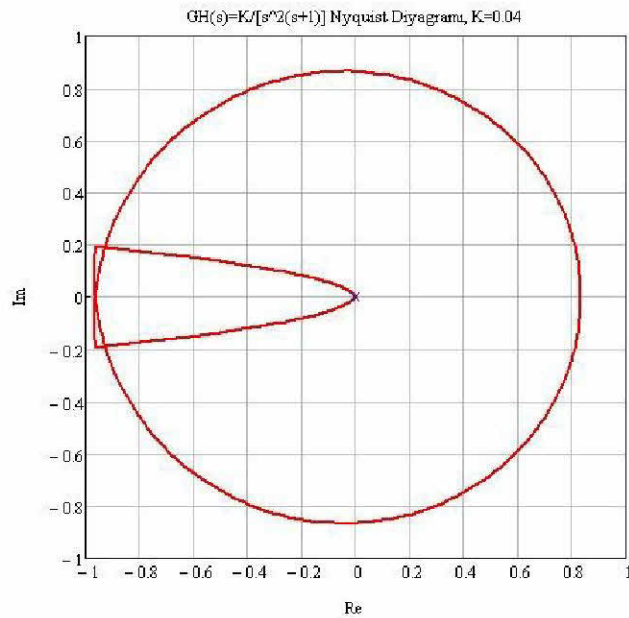
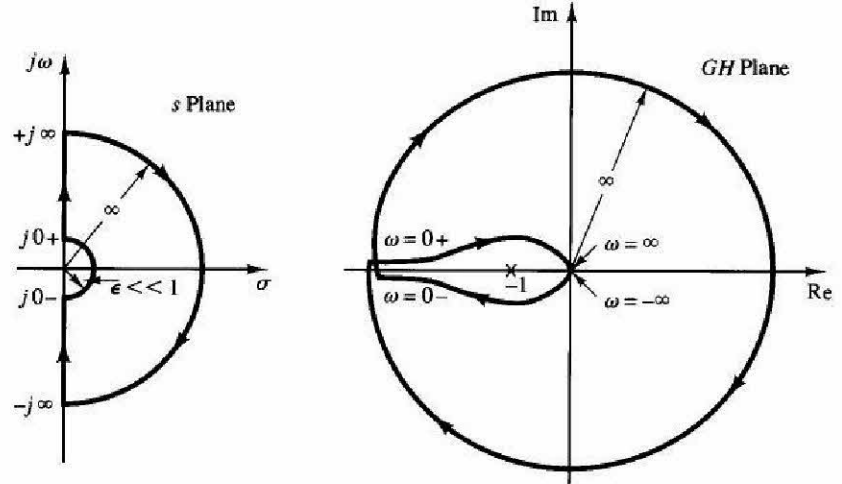
$$GH(j\omega) = \frac{1}{j^2 \omega^2 (j\omega + 1)} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{\omega^2 + 1}} \angle -180 - \tan^{-1} \omega \quad ; K=1, T=1$$

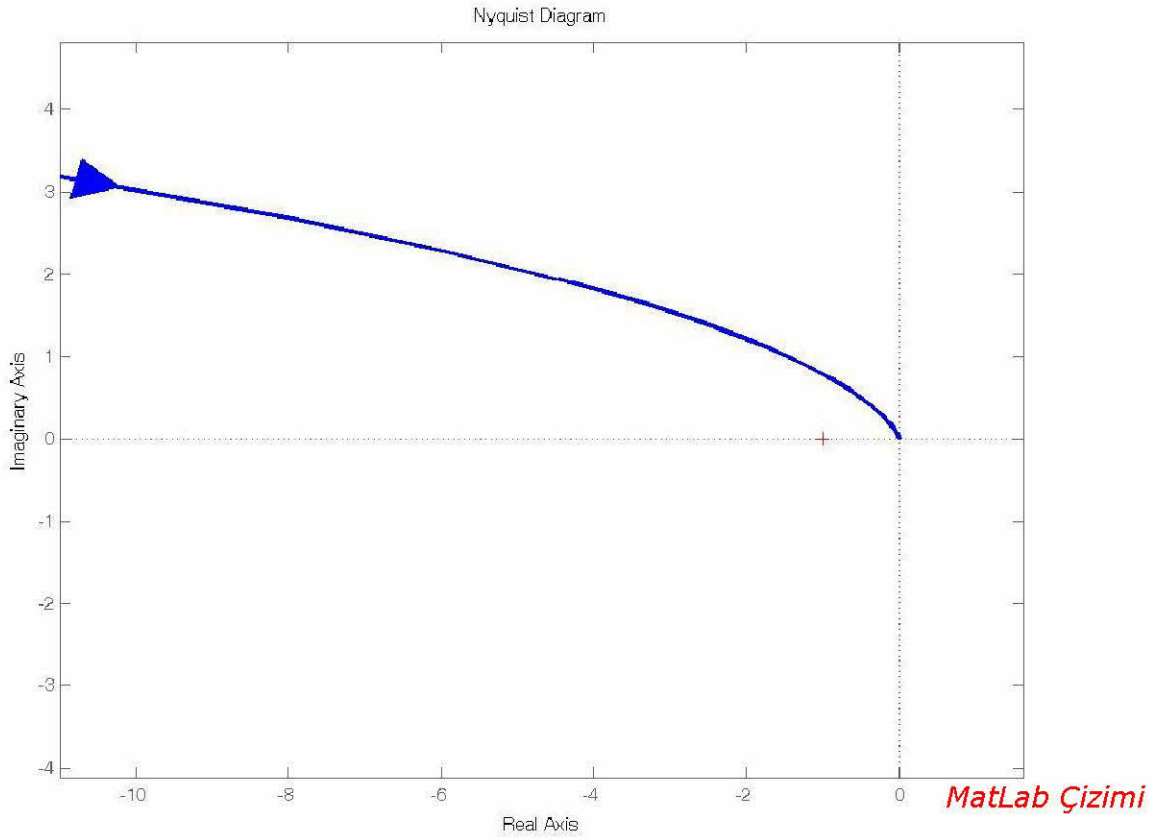
$\omega=0, \omega=1$  ve  $\omega \rightarrow \infty$  için:

$$GH(j0) = \infty \angle -180^\circ$$

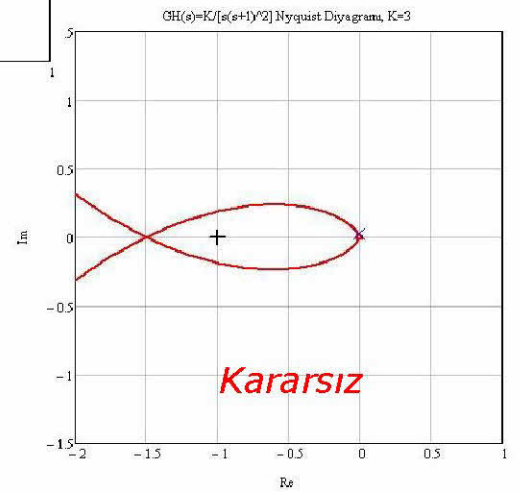
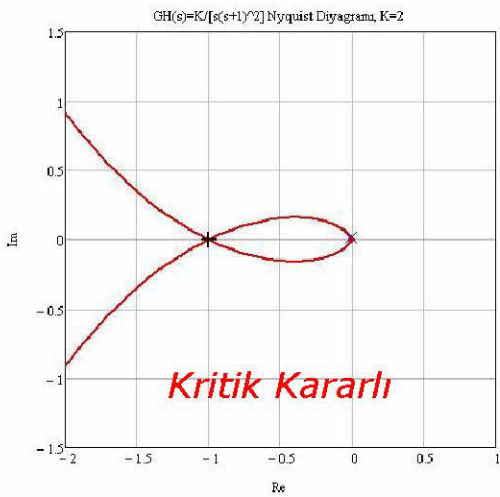
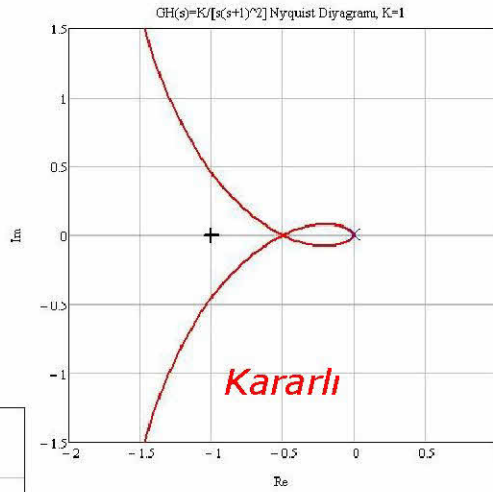
$$GH(j1) = (1/\sqrt{2}) \angle -225^\circ$$

$$GH(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

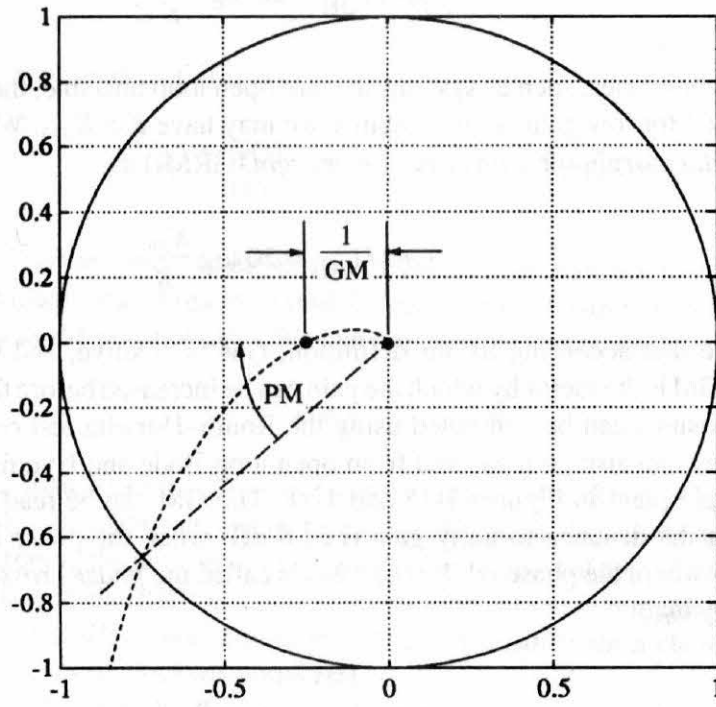




$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$$

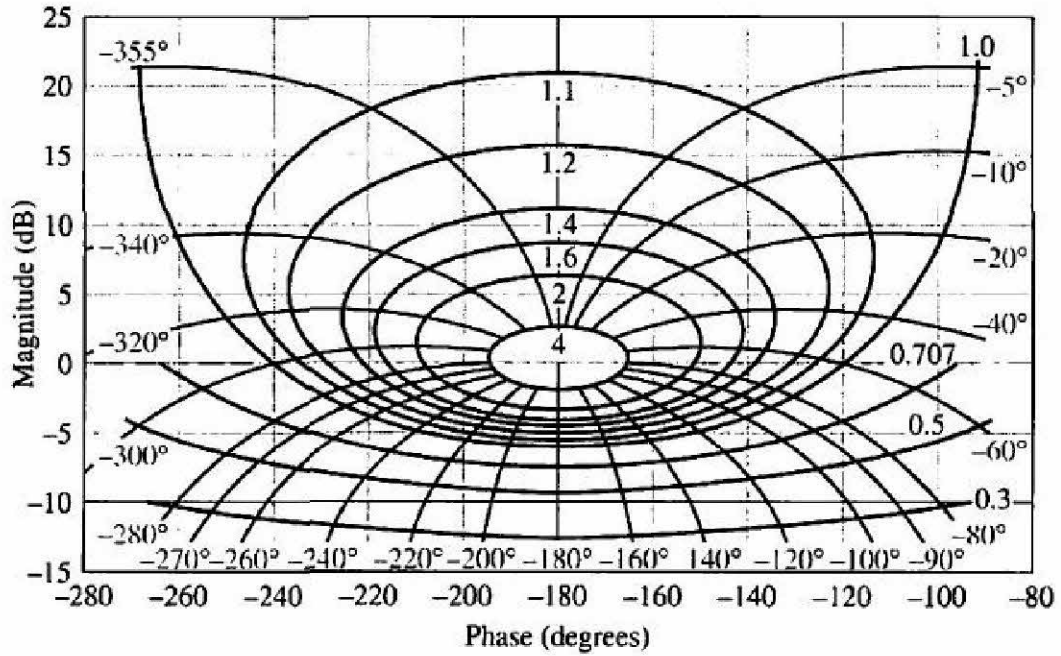


## Nyquist Diyagramında Kazanç ve Faz Payı



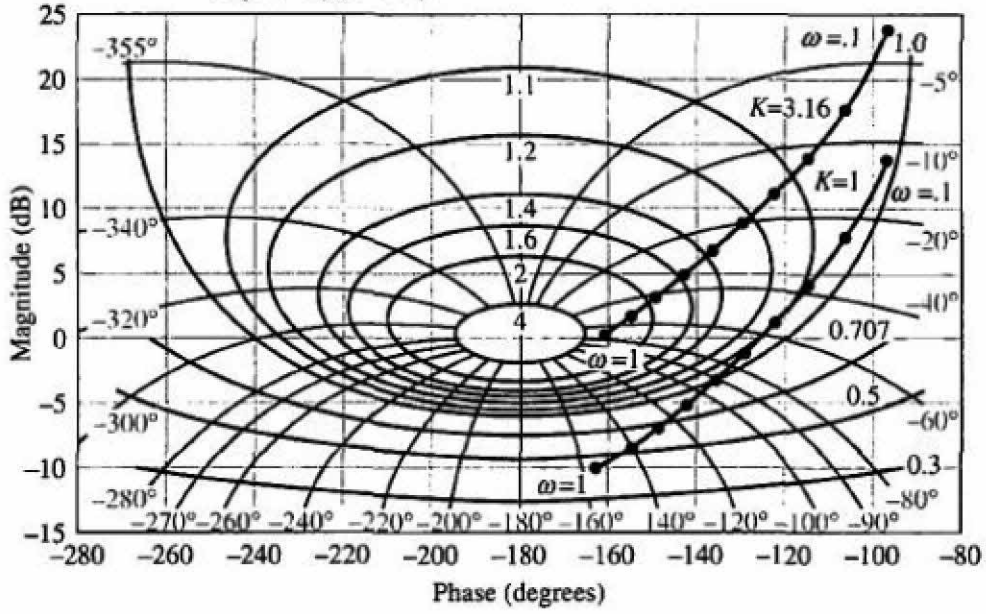
Nyquist plot showing gain and phase margins.

## Nichols Diyagramı

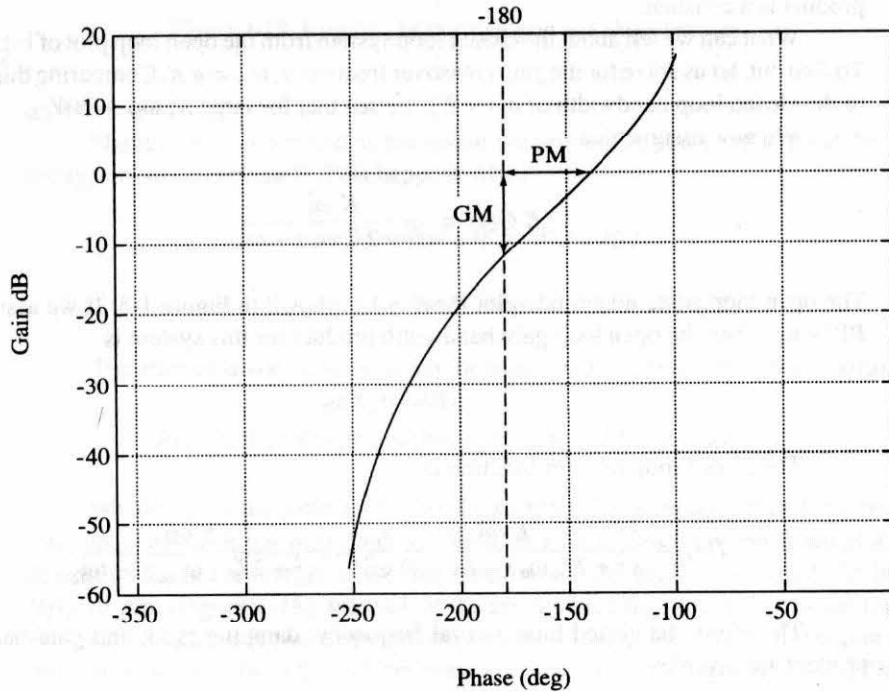


## Nichols Diyagramında Kazanç ve Faz

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



## Nichols Diyagramında Kazanç ve Faz Payı



## **Kaynaklar**

1. *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Benjamin C.KUO, Literatür Yayınları, 1999.
2. *Automatic Control Systems*, Farid Golnaraghi, Benjamin C.KUO, John Wiley, 2010.
3. *Modern Control Systems*, Richard C.DORF, Robert H.BISHOP, Prentice Hall, 2011.
4. *Control System Engineering*, Norman S. Nise, John Wiley, 2011.
5. *Modern Control Engineering*, K.OGATA, Prentice-Hall, 1997.
6. *Feedback and Control Systems*, Joseph J.Distefano, Allen R.Stubberrud, Ivan J.Williams, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995.
7. *Otomatik Kontrol Ders Notları*, Prof.Dr. Galip CANSEVER, YTÜ, 2007.
8. *Kontrol Sistem Teorisi Ders Notları*, Banu ATAŞLAR AYYILDIZ, YTÜ, 2008.
9. *Ders Notları için İnternet Adresi: <http://www.tuncayuzun.com/> ,  
<http://www.yildiz.edu.tr/~uzun/>*